Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя и формула Тейлора.

Правило Лопиталя (для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Если функции *y=f(x) и* *y=φ(x)* удовлетворяют условиям теоремы коши в некоторой окрестности точки $x=x_0$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x\to x_0$ и существуют также $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad .$$

Правило Лопиталя справедливо и при $x_0=\pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает в предельной точке неопределенность одного их двух названных видов и функции $f'(x)$; $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранне указанным для функций f(x) и y=φ(x), то можно перейти к отношению вторых производных и т.д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

<u>Пример 1.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$

Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны, дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4*4\cos 4x}{2}=8$$

<u>Пример2.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln^2 x\right]'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{3x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2\ln x\right)'}{\left(3x^3\right)'}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\frac{2}{9}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3}=0.$$

В формуле (3) предел левой части может существовать, а правой – нет.

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

- не существует.

Задания:

592. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x}$;

593. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$;

594. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$;

595. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$;

596. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$;

597. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$;

598. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;

599. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

600. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

601. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$;

602. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-2x}{x^3}$;

603. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$;

604. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^{3x}}$;

605. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$;

606. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{2x}}$;

607. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}$;

608. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+\sin x}$;

609. $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{tg} x\ln x$;

610. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2\sin\frac{x}{2}}{x+1}$;

611. $\lim\limits_{x\to 1+}\ln x\ln(x-1)$;

612. $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}$;