Исследование функции

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$.

►Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Находим ее производную:

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right).$$

Критическими точками данной функции будут $x_1 = -1$, в которой $y'=0$, и $x_2 = 0$, в которой производная y' терпит разрыв.

табл.1

Знаки f'(x) при переходе через критическую точку x0			Характер критической точки
$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$	
+	$f'(x_0)=0$ или не существует	−	Точка максимума
−	»	+	Точка минимума
+	»	+	Экстремума нет (функция возрастает)
−	»	−	Экстремума нет (функция убывает)

Эти точки разбивают область определения функции на интервалы: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, в каждом из которых производная функций сохраняет знак. По этому достаточно определить знак производной в произвольной точке каждого из интервалов. Имеем: $y'(-8)=1>0$, т.е. в интервале $(-\infty;-1)$ функция возрастает; $y'(-1/8)=$
$=-2<0$, следовательно, в интервале $(-1;0)$ функция убывает; $y'(1)=3>0$, т.е. в интервале $(0;+\infty)$ функция возрастает. Значит, при переходе через точку $x_1=-1$ в направлении возрастания x знак первой производной изменяется с «+» на «-», т.е. точка $x_1=-1$ является точкой локального максимума и $y_{max} = y(-1) = 1$. Для точки $x_2=0$ является точкой локального минимума и $y_{min} = y(0) = 0$

Теорема 3 (второй достаточный признак локального экстремума функции).
Пусть функция y=f(x) дважды дифференцируема и f'(x0) = 0. Тогда в точке x=x0 функция имеет локальный максимум, если f'' (x0)< 0, и локальный минимум, если f''(x0)> 0.

В случае, когда f''(x0) = 0, точка x=x0 может и не быть экстремальной .

Пример 4. С помощью второй производной исследовать на экстремум функцию $y = x^2 e$

►Находим первую и вторую производные:

$y' = 2xe - x^2 e = (2x - x^2)\, e$,

$y'' = (2 - 2x)e - (2x - x^2)e = (x^2 - 4x + 2)e$.

Так как производная непрерывна при $x \in \boldsymbol{R}$, то критические точки данной функции удовлетворяют уравнению $2x - x^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$
и $x_2 = 2$. Вычисляем значения второй производной в этих точках: $y''(0) = 2>0$, т.е. $x_1 = 0$ — точка минимума; $y''(2) = -2e^{2} < 0$, т.е. $x_2 = 2$
— точка максимума; $y_{min} = 0$, $y_{max} = 4e^{2}$ ◄

На отрезке $[a; b]$ функция $y=f(x)$ может достигать *наименьшего* ($y_{наим}$) или *наибольшего* ($y_{наиб}$) значения либо в критических точках функции, лежащих в интервале $(a; b)$, либо на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2; 3]$.

► Производная данной функции $y' = 3x^2 - 3$. Тогда $y' = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Обе эти критические точки принадлежат интервалу (- 2; 3). Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка: $y(-1) = 5$, $y(1) = 1$, $y(-2) = 1$, $y(3) = 21$. Сравнивая полученные числа, заключаем, что наименьшее значение на отрезке $[-2; 3]$ функция принимает в точках $x_2 = 1$ и $x = a = -2$, а наибольшее значение — в точке $x = b = 3$. итак, на отрезке $[-2; 3]$ $y_{наим} = 1$, а $y_{наиб} = 21$.◄

Кривая, заданная функцией $y=f(x)$, называется выпуклой в интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале, и вогнутой в интервале $(a;b)$, если все точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0,f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется точкой перегиба кривой. Предполагается, что в точке M существует касательная.

Теорема 4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x)< 0$ $(f''(x)>0)$, то кривая $y=f(x)$ в этом интервале выпукла (вогнута).

В точке перегиба, отделяющий промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 5 (достаточный признак точки перегиба).

Если в точке $x=x_0$ $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка со абсциссой $x=x_0$ кривой $y=f(x)$ - точка перегиба.

Пример 6. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{\frac{-x^2}{2}}$ (кривая Гаусса).

►Находим первую и вторые производные:

$$y' = -xe^{\frac{-x^2}{2}},\ y'' = e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^2 - 1\right).$$

Первая и вторая производные существуют при любых $x \in \boldsymbol{R}$. Приравнивая y'' нулю, находим: $x_1=-1$, $x_2=1$. Легко заметить, что в окрестности точки $x_1=-1$ знак второй производной меняется по следующему закону: $y''>0$ при $x<-1$, $y''<0$ при $x>-1$. Значит, $M_1(-1,e^{-1/2})$ является точкой перегиба. Слева от этой точки кривая вогнута, так как в интервале $(-\infty;-1)$ $y''>0$, а справа в интервале (-1;1)-выпукла, так как в этом интервал $y''<0$.

Далее $y''>0$ при $x>1$. Следовательно, при $x_2=1$ на кривой так же имеем точку перегиба $M_2(1,e^{-1/2})$.Слева от точки M_2 в интервале (-1;1) кривая выпукла, а справа в $(1;+\infty)$ вогнута.

Прямая L называется <u>асимптотой</u> данной кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые). В примере 6 кривая Гаусса имеет асимптоту $y=0$.Если существуют числа $x=x_i$ $(i=l,n)$, при которых $\lim\limits_{x\to x_i} f(x) = \pm\infty$, т.е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x=x_i$ называются вертикальными асимптотами кривой $y=f(x)$.

Если существуют пределы

$k = \lim f(x)/x$, $b=\lim (f(x)-kx)$,

то прямые $e=kx+b$- наклонные асимптоты кривой $y=f(x)$ (при $k=0$- горизонтальные). При $x\to\pm\infty$ может прийти к двум значениям для k. Если имеем одно значение для k, то при $x\to\pm\infty$ можем получить два значения для b.

Пример 7. Найти асимптоты кривой $y=x^3/(x^2-1)$.

► Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3/(x^2-1)=\pm\infty$, то данная кривая имеет две вертикальные асимптоты $x=\pm 1$. Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} y/x=\lim_{x\to\pm\infty} x^2/(x^2-1)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^3/(x^2-1)-x)=\lim_{x\to\pm\infty} x/(x^2-1)=0.$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота, уравнение которой $y=x$

СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Для полного исследования функции и построение ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1) указать область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат и вертикальные асимптоты (если они существует);
3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности периодичности функции;
4) исследовать функцию монотонность и экстремум ;
5) определить интервалы выпуклости вогнутости , точки перегиба;
6) найти асимптоты графика функции;
7) произвести необходимые дополнительные вычисления;
8) построить график функции.

Пример. Провести полное исследования функции:

$$y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$$

и построить ее график.

► Воспользуемся рекомендуемой схемой.

1. Данная функция определена для всех $x \in R$.
2. Функция не имеет точек разрыва и пересекает ось Ox при $x = -3$ и $x = 0$, а ось Oy - при $y = 0$.
3. Функция не является четной, нечетной, периодической.
4. Находим производную функцию:

$$f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$f'(x)=0$ при $x_1 = -2$ и не существует в точках $x_2 = -3$, $x_3 = 0$. Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы $(-\infty; -3)$, $(-3;-2)$, $(-2; 0)$, $(0;+\infty)$.
Внутри каждого из полученных, а именно:$f'(x)> 0$ в интервалах $(-\infty; -3)$,$(-3;-2)$, и $f'(x)<0$ в $(-2; 0)$.Это означает что функция возрастает в интервале$(-\infty;-2)$, убывает в интервале $(-2; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. Так как в окрестности точки $x_1 =-1$ знак первой производной при увеличении x изменяется “+” на “-”,то $x_1 =-2$ является точкой максимума , $y_{max}\sqrt[3]{4}$. Для точки $x_3 = 0$ знак первой производной изменяется с “+” на “-” ,т.е. $x_3 = 0$ - точка минимума, $y_{min} = y(0) =0$. В точке $x = -3$ функция не имеет экстремума так как в ее окрестности $f'(x)$ не меняет знак.

5.Находим вторую производную:

$$f''(x)=-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$$

которая не равна нулю для любого конечного x. Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т. е. $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. Определим знак y'' в каждом из интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции:

$f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$, кривая вогнута; $f''(x) < 0$ при $x \in (-3; 0)$, кривая выпукла. Так как в окрестности точки $x_2 = -3$ вторая производная меняет знак, то M (-3; 0) является точкой перегиба. Точка $x_3 = 0$ не является точкой перегиба, так как в ее окрестности знак $f''(x)$ не меняется.

6. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. График функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если существует пределы для k и b, указанные в правиле нахождения наклонной асимптоты. Вычислим их для данной функции:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x+3)x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x^1+3)x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{1 + 6/x + 9/x^2} + \sqrt[3]{1 + 3/x} + 1} = 1$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y=x+1$.

Прежде чем строить график функцию, целесообразно установить угол α, под которым кривая пересекает ось абсцисс в точках $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. В этих точках $y' = tg\alpha = \infty$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Так как в точке $x_3 = 0$ функция достигает нулевого минимума, то ее график не расположен ниже оси ox в окрестности этой точки. Точка $x_3 = 0$ является точкой возврата графика функции.

8 . по результатам исследования строите график функции.