Практическое занятие 1
Функции нескольких переменных

1Область определения функции

Требуется знание следующих понятий: n-мерное арифметическое пространство, точка n-мерного арифметического пространства, основные элементарные функции, функция многих переменных (на примере функции двух переменных), область определения и область значения функции многих переменных, график функции многих переменных.

Пример 1(a.) Найти область определения функции $z = \arccos\dfrac{x}{x+y}$

Δ Эта функция определена, если $\left|\dfrac{x}{x+y}\right| \le 1$, $y \ne -x$, то есть $|x| \le |x+y|$, $y \ne -x$. Возведя в квадрат обе части предыдущего неравенства, получим $x^2 \le x^2 + 2xy + y^2$, то есть $2xy + y^2 \ge 0$. Далее, имеем $\begin{cases} y(2x+y) \ge 0, \\ y \ne -x. \end{cases}$ Данная система будет выполняться, если выполняется одно из следующих соотношений

$$\begin{cases} y \ge 0, \\ 2x + y \ge 0, \\ y \ne -x. \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} y \le 0, \\ 2x + y \le 0, \\ y \ne -x. \end{cases}$$

В итоге, область определения функции z можно записать в виде

$$D = \left\{ (x,y) \in R_2 : (x,y) \ne (0,0), \begin{cases} y \ge 0, \\ 2x + y \ge 0, \end{cases} \textit{либо} \begin{cases} y \le 0, \\ 2x + y \le 0. \end{cases} \right\}.$$

Геометрически D состоит из двух тупых углов, образованных прямыми $y = 0,\ y = -2x$, включая границы без точки $(0,0)$. Δ

Пример 1(b.) Найти область определения функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, где R– положительное число.

Δ Функция z принимает действительные значения при условии $R^2 - x^2 - y^2 \ge 0$, то есть $x^2 + y^2 \le R^2$. Следовательно, областью определения данной функции является круг радиусом R с центром в точке $(0,0)$, включая граничную окружность, то есть $D = \{(x,y) \in R_2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Δ

2 Частные производные первого порядка

Требуется знание следующих понятий: Частные производные первого порядка от функции $z = f(x,y)$, основные правила и формулы дифференцирования функции.

Пример 2(a.) Дана функция $z = arctg\dfrac{y}{x}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Δ Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\frac{y}{x} \right)_x' = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)_x' = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x\left(1+(y/x)^2\right)}=\frac{x}{x^2+y^2}. \qquad \Delta$$

*Пример 2(b)***.** Дана функция $z=xe^{-xy}$**.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Δ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xe^{-xy}\right)'_x=(x)'_x e^{-xy}+x\left(e^{-xy}\right)'_x=e^{-xy}-xye^{-xy}=e^{-xy}(1-xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xe^{-xy}\right)'_y=-x^2e^{-xy}. \qquad \Delta$$

*Пример 2(с)***.** Дана функция $z=\frac{\cos y^2}{x}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Δ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_x=\frac{-\cos y^2}{x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_y=\frac{-2y\sin y^2}{x}. \qquad \Delta$$

3 Полный дифференциал. Использование полного дифференциала для приближенного вычисления функции.

Требуется знание следующих понятий: полное приращение функции в точке, приращение аргумента, полный дифференциал, дифференциалы независимых переменных.

Пример 3(а). Дана функция $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$**.** Найти dz.

Δ Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)'_x=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)'_y=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}+\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$**.**

Δ

Пример 4(а). Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

Δ Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$. В нашем случае $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, где $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$, $y_0=2$, $\Delta y=-0{,}03$. Следовательно, $f(1{,}02;1{,}97)\approx f(1{,}2)+df(1{,}2)$, $f(1{,}2)=\sqrt{1^3+2^3}=\sqrt{9}=3$.

$df = f'_x dx + f'_y dy$. Так как $f'_x = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, $f'_y = \dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, то получим

$df = \dfrac{3\left(x^2dx + y^2dy\right)}{2\sqrt{x^3+y^3}}$. Найдем значение дифференциала df в точке $(1,2)$.

$df(1,2) = \dfrac{3}{2\sqrt{1^3+2^3}}\left(1^2\cdot 0{,}02 + 2^2\cdot(-0{,}07)\right) = \dfrac{3}{2\cdot 3}\left(0{,}02 - 0{,}12\right) = -0{,}05$ В итоге получим $f(1{,}02;\,1{,}97) \approx 3 - 0{,}05 = 2{,}95$ Δ

4 Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Требуется знание следующих понятий: частные производные и дифференциалы высших порядков (символическая формула $d^n z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$).

Пример 5(а). Дана функция $z = y\cdot\ln x$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Δ Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \ln x$.

Дифференцируя повторно, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln x\right) = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\ .\ \Delta$$

Пример 6(а). Дана функция $z = x^2\cdot y$. Найти $d^3 z$.

Δ Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = 2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = 0.$$

Подставив найденные частные производные в формулу для вычисления $d^3 z$, получим $d^3 z = 0\cdot dx^3 + 3\cdot 2\cdot dx^2dy + 3\cdot 0\cdot dx^2dy + 0\cdot dy^3 = 6dx^2dy$ Δ

Аудиторная работа

Пример 1 *Найти область определения функции*

(c) $z = \arcsin\dfrac{y+1}{x-1}$, **(d)** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}$, $R > 0$.

Пример 2. *Найти* $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(d) $z = e^{x^2+y^3}$, **(e)** $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$, **(f)** $z = \ln(x^2+y^2)$.

Пример 3. *Найти* dz.

(b) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$, **(c)** $z = x^2y$.

Пример 4. *Вычислить приближенно.*

(b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}$.

Пример 5. *Найти* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(b) $z = x^2 \ln(x + y)$.

Пример 6. *Найти* $d^5 z$.

(b) $z = e^{x+y}$.

Пример 7(b). *Разложить функцию* $f(x, y) = e^x \cos y$ *по формуле Тейлора с центром в точке* $M_0(0{,}0)$ *до членов четвертого порядка включительно.*

Домашние задания:

1.Дана функция $f(x,y) = xy + \dfrac{y}{x}$. Найти $f(-1{,}2)$, $f(y,x)$, $f(-x,y)$, $f(1,t)$, $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

2.Найти область определения функции $z = \dfrac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$.

3. Найти область определения функции $z = \ln(4 + 4x - y^2)$.

4. Найти область определения функции $z = \sqrt{(x-1)(3-y)}$.

5. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

6. Найти частные производные функции $z = x^3 + y^3 - 3axy$. Вычислить их значения в точке $P_0(1;1)$.

7. Найти значения частных производных в точке $P_0(0;1)$ функции $z = e^{-xy}$.

8. Найти u'_z, если $u = arctg \dfrac{y}{xz}$.

9. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$.

10. Найти вторые частные производные функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

11. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, если $z = \sin xy$.

12. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y - y^2 x$.

13. Найти $d^2 u$, если $u = xyz$.

14. Вычислить приближенно число $a = (1{,}04)^{2{,}03}$.

15. Разложить функцию $f(x,y) = e^x \sin y$ по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0{,}0)$ до членов четвертого порядка включительно.