Экстремум функции нескольких переменных

1 Локальный экстремум

Определение12. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет максимум (минимум) $f(a,b)$ в точке $P(a,b)$, если для всех отличных от P точек $P'(x, y)$ в достаточно малой окрестности точки P выполнено неравенство $f(a,b) > f(x, y)$ (или соответственно $f(a,в) < f(x, y)$). Максимум или минимум функции называется её экстремумом (см.рис.9.3).

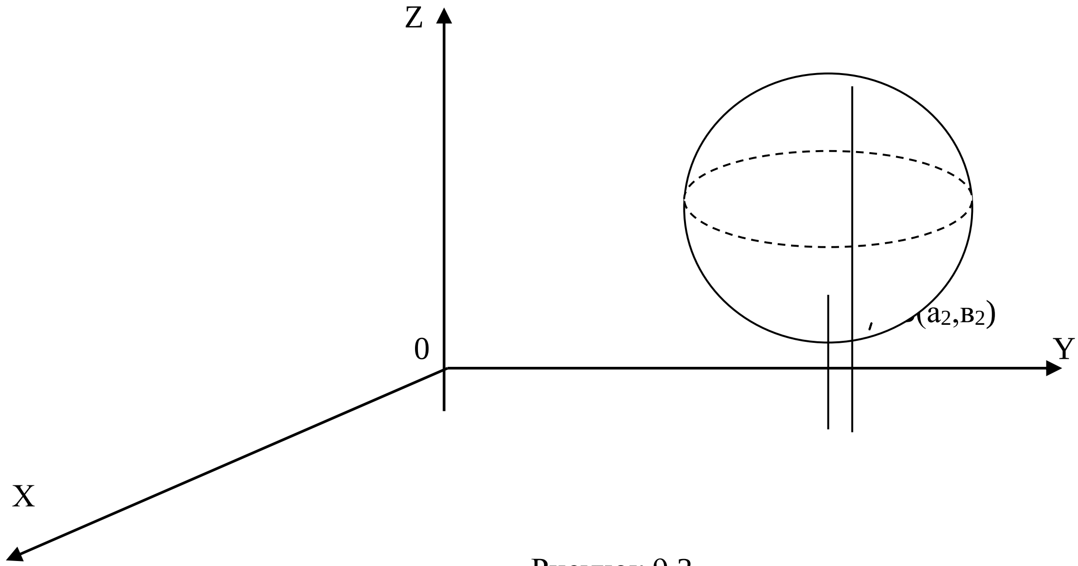

Рисунок 9.3

Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

Необходимые условия экстремума.

Определение 13. Точка (a,b), в которой дифференцируемая функция $f(x, y)$ может достигать экстремума, называется критической точкой. Она находится путём решения системы уравнений:

$$f'_x(a,b) = 0,\ f'_y(a,b) = 0 \qquad (4)$$

Это необходимые условия экстремума.

Система (3) эквивалентна одному уравнению $df(x, y) = 0.$

В общем случае в точке экстремума $P(a,b)$ функции $f(x, y)$ или $df(a,b) = 0,$ или $df(a,b)$ не существует.

Достаточные условия экстремума.

Пусть $P(a,b)$ - критическая точка функции $f(x, y),$ т.е. $df(a,b) = 0.$ Тогда:

а) если $d^2 f(a,b) < 0$ при $dx^2 + dy^2 > 0,$ то $f(a,b)$ есть максимум функции $f(x, y);$

б) если $d^2 f(a,b) > 0$ при $dx^2 + dy^2 > 0,$ то $f(a,b)$ есть минимум функции $f(x, y);$

в) если $d^2 f(a,b)$ меняет знак, то $f(a,b)$ не является экстремумом функции $f(x, y).$

Приведенные условия эквивалентны следующим: пусть

$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ и $A = f''_{xx}(a,b),\ B = f''_{xy}(a,b),\ C = f''_{yy}(a,b)$.

Составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$.

Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в точке $P(a,b)$, а именно максимум, если $A < 0$ (или $C < 0$), и минимум, если A>0 (или C>0); 2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке $P(a,b)$ нет; 3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума функции в точке $P(a,b)$ остается открытым (требуется дальнейшее исследование).

Для функции трёх переменных и большего числа переменных необходимые и достаточные условия существования экстремума аналогичны тем, которые справедливы для функции двух переменных.

Пример 21. Исследовать на экстремум $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,\ y_2 = 1,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0.$$

Получим две так называемые критические точки $M_1(1;1)$, $M_2(0;0)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

1. Рассмотрим т. $M_1(1;1)$ z имеет минимум.
   $A = 6$; $B = -3$; $C = 6 \Rightarrow \Delta = -27 < 0$, $A = 6 > 0$.
   Следовательно в т. $M_1(1;1)$ z имеет минимум.
2. Рассмотрим т. $M_2(0;0)$. Тогда $A = 0$; $B = -3$; $C = 0 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ - функция в т. M_2 экстремума не имеет.

*Пример 22***.** Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Решение. Найдем частные производные и составим систему уравнений (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0,$$

или
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ xy = 2; \end{cases} \qquad \begin{matrix} x^2 + y^2 = 5; \\ 2xy = 4; \end{matrix} \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{matrix} (x+y)^2 = 3^2, \\ (x-y)^2 = 1^2, \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ x + y = -3 \\ x - y = -1 \\ x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 2, \quad y = 1; \quad x = -2, \quad y = -2. \\ \\ \\ x = 1, \quad y = 2; \quad x = -1, \quad y = -2. \end{matrix}$$

Получаем четыре стационарные точки:

$P_1(1;2)$; $P_2(2;1)$; $P_3(-1;-2)$; $P_1(-2;-1)$.

Найдем производные 2-порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

и составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки P_1: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6,$

$\Delta = AC - B^2$ =36-144<0. Значит, в точке P_1 экстремума нет.

2) Для точки P_2: A=12, B=6, C=12; Δ =144-36>0, A>0. В точке P_2 функция имеет минимум. Минимум этот равен значению функции при x=2, y=1:

$$z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28.$$

3) Для точки P_3: A=-6, B=-12, C=-6; Δ =36-144<0. Экстремума нет.

4) Для точки P_4: A=-12, B=-6, C=-12; Δ =144-36>0, A<0. В точке P_4 функция имеет максимум, равный

$$z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$$

2 Условный экстремум

Определение 14. Условным экстремумом функции $f(x, y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что её аргументы связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнением связи).

Чтобы найти условный экстремум функции $f(x, y)$ при наличии соотношения $\varphi(x, y) = 0$, составляют так называемую функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где λ - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции. Необходимые условия экстремума сводятся к системе трёх уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными $x, y, \lambda,$ которые можно, вообще говоря, определить.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2 F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

при системе значений x, y, λ, полученной из (2) при условии, что dx и dy связаны соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0\ (dx^2+dy^2\neq 0).$$

А именно, функция $f(x,y)$ имеет условный максимум, если $d^2F<0$, и условный минимум, если $d^2F>0$. В частности, если дискриминант Δ для функции $F(x,y)$ в стационарной точке положителен, то в этой точке имеется условный максимум функции $f(x,y)$, если А<0 (или С<0), и условный минимум, если А>0 (или С>0).

Аналогично находится экстремум функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется уравнений связи.

*Пример 23***.** Найти экстремум функции

$$z=6-4x-3y$$

при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2=1.$$

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z=6-4x-3y$ для точек пересечения её с цилиндром $x^2+y^2=1$.

Составим функцию Лагранжа

$$F(x,y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1).$$

Имеем $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$.

Необходимые условия дают систему уравнений

$$\begin{cases}-4+2\lambda x=0,\\ -3+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

решив которую, найдём:

$$x=\frac{2}{\lambda},\quad y=\frac{1{,}5}{\lambda};\qquad x^2=\frac{4}{\lambda^2},\quad y^2=\frac{2{,}25}{\lambda^2}.$$

$$\frac{4}{\lambda^2}+\frac{2{,}25}{\lambda^2}=1;\qquad \frac{6{,}25}{\lambda^2}=1;\qquad \lambda^2=6{,}25,$$

$$\lambda_1=\frac{5}{2},\ x_1=\frac{4}{5},\ y_1=\frac{3}{5};\ \text{ и }\ \lambda_2=-\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{4}{5},\ y_2=-\frac{3}{5}.$$

Так как $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}=2\lambda,\quad \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}=2\lambda,$

то $$d^2F=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Если $\lambda=\dfrac{5}{2},\ x=\dfrac{4}{5}\ \ и\ \ y=\dfrac{3}{5}$, то $d^2F>0$, и, следовательно, в этой точке функция имеет условный минимум.

Если $\lambda = -\dfrac{5}{2}$, $x = -\dfrac{4}{5}$ *и* $y = -\dfrac{3}{5}$, то $d^2F < 0$, и, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум.

Таким образом,

$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$$

9.4.3 Глобальный экстремум (наибольшее и наименьшее значения функции)

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в критических точках внутри области или в точках границы области.

Пример 24. Определить наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в области $x \le 0,\ \ y \le 0,\ \ x + y \ge -3.$

Решение. Указанная область есть треугольник (рис.9.4).

1) Найдём критические точки:

$$z'_x = 2x - y + 1 = 0,$$

$$z'_y = 2y - x + 1 = 0;$$

отсюда x=-1, y=-1; получаем точку M(-1; -1). В точке M значение функции $z_M = -1.$ Исследование на экстремум – не обязательно.

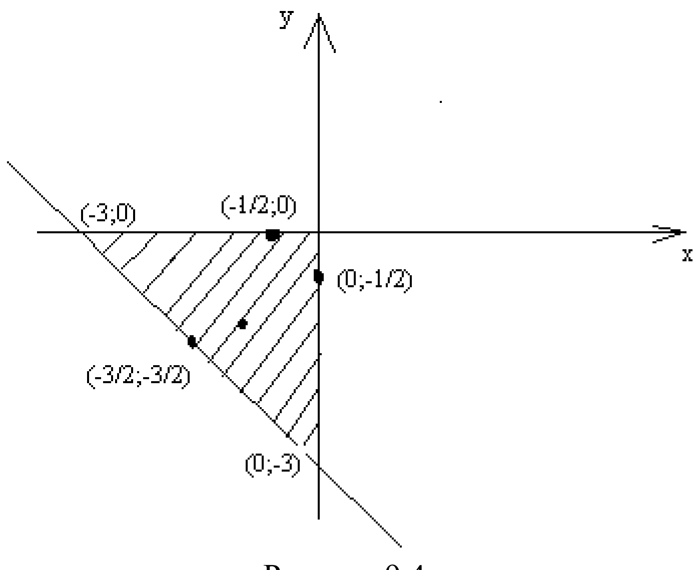

Рисунок 9.4

2) Исследуем функцию на границах области.

При x=0 имеем $z = y^2 + y$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений этой функции одного аргумента на отрезке $-3 \le y \le 0$. Проводя исследование, найдём, что $(z_{наиб})_{x=0} = 6$ в точке (0;-3); $(z_{наим})_{x=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. При *y=0* получаем $z = x^2 + x$. Аналогично найдем, что $\left(z_{наиб}\right)_{y=0} = 6$ в точке (-3;0); $\left(z_{наим}\right)_{x=0} = -\frac{1}{4}$ в точке $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

При x+y=-3 или y=-3-x будем иметь $z = 3x^2 + 9x + 6$. Аналогичным образом найдем, что $\left(z_{наим}\right)_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$ в точке $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$; $\left(z_{наиб}\right)_{x+y=-3} = 6$ совпадает с $\left(z_{наиб}\right)_{x=0}$ и $\left(z_{наиб}\right)_{y=0}$. На прямой *x+y=-3* можно было бы исследовать функцию на условный экстремум, не приводя к функции одного аргумента.

3) Сопоставляя все полученные значения функции z заключаем, что $z_{наиб} = 6$ в точках (0;-3) и (-3;0); $z_{наим} = -1$ в стационарной точке М

.

Следующие задания решить самостоятельно.

1. Найти область определения функции

$$1)\ z = \arcsin\frac{y+1}{x-1}, \qquad 2)\ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}},\ R>0.$$

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$1)\ z = e^{x^2+y^3},\quad 2)\ z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3,\quad 3)\ z = \ln(x^2+y^2).$$

3. Найти dz, если: 1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$, 2) $z = x^2y$.

4. Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}$.

5. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = x^2\ln(x+y)$.

6. Найти d^5z, если $z = e^{x+y}$.

7. Разложить функцию $f(x,y) = e^x\cos y$ по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0,0)$ до членов четвертого порядка включительно.

8. Исследовать на экстремум функцию z = $x^3 + y^2 - 3x + 2y$.
(Ответ: z_{min} == z(l, — 1)= —3.)

9.Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
(Ответ: $г_{щах}$ = z(4, 4)= 15.)

10.Исследовать на экстремум функцию z = $3x^2$ —y^3 + $3y^2$ + 4y.
(Огвет: z_{min} = г{0, —2/3)= —4/3.)

11. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

$a)z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y,$

$b)\ z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y,$

$c)z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y.$

(Ответ: а) z_{min} = z(2, 1)= — 28, z_{max} = z(—2, — 1) = 28; б) $z_{ш1п}$ =— z(1, 0)= — 1; в) точек экстремума нет.)

12: Найти экстремумы функции $z=x+2y$ при условии $x^2+y^2=5$. *(Ответ:* $z_{\min}=-5$ при $x=-1$, $y=-2$; $z_{\max}=5$ при $x=1$, $y=2$.)

13. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2y^2+4xy-6x+5$ в области, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=3$. *(Ответ:* $z_{наим}=z(3,0)=9$,
$z_{наиб}=z(0,0)=5$.)

14 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y(4-x-y)$ в области, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$. *(Ответ:* $z_{наии}=z(4,2)=-64$, $z_{ив}=z(2,1)=4$.)