ЛЕКЦИЯ 1. МЕХАНИКА

1.1 Введение. Элементы кинематики.

Механика– часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Механика Галилея – Ньютона называется *классической механикой*.

В классической механике изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме (v<< c).

Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света с, изучаются *релятивистской механикой*, основанной на специальной теории относительности, сформированной А.Эйнштейном (1879-1955).

Движение микроскопических тел со скоростями много меньшими скорости света описывается *квантовой механикой*.

Область физики, изучающая движение микроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, называется *релятивистской квантовой механикой*, построение которой не завершено и в настоящее время.

В классической механике общепринята концепция пространства и времени, разработанная Исааком Ньютоном и господствующая на протяжении 17-19 в которой пространство и время рассматриваются как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел. Дальнейшие исследования показали ограниченность таких представлений.

Изучение механики начнем с классической механики, которая делится на три раздела:

Кинематика - изучает движение тел, не рассматривая причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел.

Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия, поэтому законы статики отдельно от законов динамики в вузовском курсе физики не рассматриваются.

1.1.1 Основные понятия кинематики.

Наиболее простым видом движения является движение материальной точки.

Материальная точка это тело, обладающее массой, размерами и формой которого в данной задаче можно пренебречь.

Изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению движения системы материальных точек.

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми точками которого не меняется со временем.

Абсолютно твердое тело, с которым связывают ту или иную систему координат, условно считают неподвижным и относительно которого исследуют движение других тел, называется *телом отсчета.* Движется тело или покоится, определяется только телом отсчета, по отношению к которому рассматривается это движение.

Совокупность системы координат, жестко связанной с телом отсчета, часов для отсчета времени и указание начала отсчета времени называется *системой отсчета*

В декартовой системе координат положение точки А в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала системы координат в данную точку.

При *координатном способе* описания движения координаты точки задаются как функция времени $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$ – они называются кинематическими уравнениями движения материальной точки в скалярной форме. Чтобы получить уравнение траектории из этих уравнений необходимо исключить время.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы.

Векторный способ описания движения основан на том, что положение точки в пространстве указывается радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Если начало отсчета связать с системой координат и ввести единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ то для любого момента времени радиус вектор можно выразить через его компоненты $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, т.к. $\vec{r}$ - функция времени, то и *x, y, z* –функции времени. Таким образом, от векторного способа задания движения можно перейти к координатному способу.

1.1.2 Перемещение

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении А. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в ее положение в данный момент (приращение радиус-вектора за рассматриваемый промежуток времени) называется *перемещением* (см. рис. 1.1)

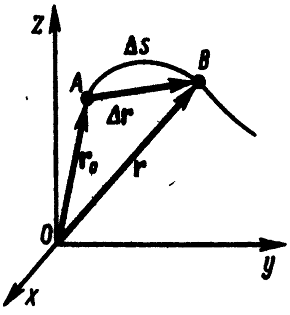

Рис. 1.1

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \tag{1.1}$$

Модуль вектора перемещения

$$AB = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{1.2}$$

Линия, которую описывает материальная точка, перемещаясь в пространстве, называется *траекторией*

В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

При траекторном способе описания движения фиксируется положение точки в начальный момент времени, затем траектория разбивается на такие малые участки, чтобы каждый из них можно было заменить прямолинейным перемещением $\Delta\vec{r}$. Перемещения, направленные от начальной точки считаются положительными, а направленные к ней – отрицательными.

Алгебраическая сумма перемещений, совершенных точкой к данному моменту времени, называется расстоянием. Расстояние является скалярной функцией времени.

Сумма абсолютных величин перемещений, совершенных точкой к данному моменту времени называется *длиной пути* S.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}| = dS$.

1.1.3 Скорость

Скорость - является векторной величиной, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Средняя скорость перемещения - это векторная величина, определяемая равенством $<\vec{\upsilon}>=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$. При неограниченном уменьшении Δt (при этом точка А стремится к точке В), средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью* или скоростью в данной точке:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.3}$$

Вектор мгновенной скорости для каждого момента времени направлен по касательной к траектории в сторону движения, т.е.

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau} \tag{1.4}$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной.

По мере уменьшения Δt путь ΔS все больше приближается к $|\Delta\vec{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \tag{1.5}$$

Вектор скорости можно разложить на составляющие по координатным осям:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_X \vec{i} + \upsilon_Y \vec{j} + \upsilon_Z \vec{k} \qquad (1.6)$$

С другой стороны, подставляя в формулу (1.6) выражение (1.5), получим:

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (1.7)$$

Из сравнения (1.6) и (1.7) следует, что

$$\upsilon_X = \frac{dx}{dt}; \upsilon_Y = \frac{dy}{dt}; \upsilon_Z = \frac{dz}{dt} \qquad (1.8)$$

При координатном способе задания движения модуль мгновенной скорости равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (1.9)$$

Средней путевой скоростью $<\upsilon_S>$ называется скалярная величина, равная отношению пути ΔS к тому промежутку времени, за которое этот путь пройден

$$<\upsilon_S> = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1.10)$$

Т.к. $|\Delta\vec{r}| \le \Delta S$, то $|<\vec{\upsilon}>| \le |<\upsilon_S>|$.

Если при движении точки модуль ее скорости не изменяется, то движение называется равномерным.

Скорость результирующего движения $\vec{\upsilon}$ материальной точки, участвующей одновременно в нескольких движениях, определяется как геометрическая сумма всех векторов скоростей $\vec{\upsilon}_i$ отдельных движений, в которых участвует материальная точка: $\vec{\upsilon} = \sum \vec{\upsilon}_i$.

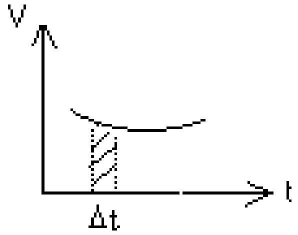

Рисунок 1.2

Если выражение $dS = \upsilon dt$ проинтегрировать в пределах от t до $t + dt$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время dt:

$$S = \int_t^{t+dt} \upsilon \, dt \qquad (1.11)$$

В случае равномерного движения $\upsilon = const$ и $S = \upsilon \int\limits_{t}^{t+\Delta t} dt = \upsilon \Delta t$.

В общем случае

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \upsilon(t) dt.$$

По графику скорости можно найти путь, пройденный телом: он численно равен площади фигуры заключенной между кривой зависимости $\upsilon - t$ и осями координат (рис. 1.2).

1.1.4 Ускорение

Ускорение- это физическая величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости.

Пусть при движении материальной точки из положения А в положение В, в течение промежутка времени от t до $t + \Delta t$, её скорость изменяется от значения $\vec{\upsilon}$ до $\vec{\upsilon}_1$ (Рис. 1.3). Вектор изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}$.

Средним ускорением $<\vec{a}>$ за время Δt, называется вектор, численно равный отношению изменения вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к промежутку времени, за которое это изменение произошло:

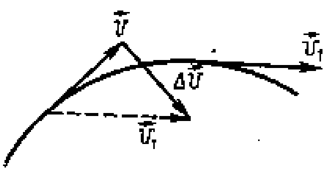

Рис. 1.3

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (1.12)$$

Направление $<\vec{a}>$ совпадает с направлением $\Delta\vec{\upsilon}$.

Мгновенным ускорением $\vec{a}$ называют векторную величину, численно равную пределу, к которому стремится среднее ускорение за промежуток времени Δt, при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} <\vec{a}> = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (1.13)$$

Используя соотношение (1.12), получим:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.14)$$

Согласно уравнению (1.14) вектор мгновенного ускорения равен первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от вектора перемещения по времени. Подставляя в формулу (1.14) выражение (1.7), получим формулу ускорения в координатной форме:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{1.15}$$

где $\frac{d^2x}{dt^2} = a_X$, $\frac{d^2y}{dt^2} = a_Y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = a_Z$ - компоненты вектора ускорения в декартовой системе координат. Модуль вектора ускорения в этом случае определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \tag{1.16}$$

Так как, вектор скорости характеризуется величиной и направлением, то вектор ускорения должен характеризовать быстроту изменения скорости как по величине, так и по направлению.

В общем случае произвольного криволинейного движения вектор скорости $\vec{\upsilon}$ может изменяться и по величине (модулю) и по направлению. Вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ можно разложить на две составляющие, одна из которых, $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$, характеризует быстроту изменения скорости только по величине, другая $\Delta\vec{\upsilon}_n$ – быстроту изменения скорости только по направлению. Тогда *тангенциальная составляющая ускорения* запишется в виде следующего уравнения:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} \tag{1.17}$$

Направление вектора $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением касательной к траектории: $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$. (Следует обратить внимание: полное ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ и тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ две разные физические величины).

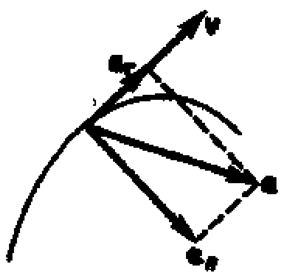

Рис. 1.4

Нормальная составляющая вектора $\Delta\vec{\upsilon}$, $\Delta\vec{\upsilon}_n$, характеризует изменение скорости за время Δt по направлению. Она направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также центростремительным ускорением).

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$$

Соотношение для a_n справедливо не только для плоского движения, но и для любого движения, только вместо радиуса окружности r надо подставлять радиус кривизны траектории.

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих ускорения (рис. 1.4).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad (1.2)$$

Модуль ускорения можно определить по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{r} + \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2} \qquad (1.19)$$

При равномерном движении по окружности тангенциальное ускорение отсутствует. Полное ускорение равно нормальному ускорению и направлено по радиусу окружности к ее центру. Поэтому нормальное ускорение часто называют центростремительным.

1.1.5 Кинематика твердого тела

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

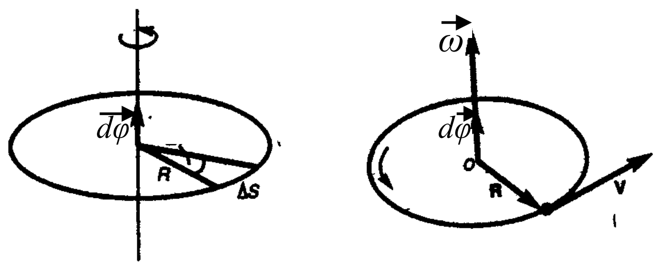

Рис. 1.5

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Средняя угловая скорость $<\omega>$ это величина, равная отношению угла поворота тела $\Delta\varphi$ к тому промежутку времени, за которое этот поворот произошел:

$$<\omega> = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1.20)$$

Мгновенная угловая скорость или просто угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ -}$$

псевдовекторная величина. Направление вектора $\vec{\omega}$ находится по правилу буравчика (правилу правого винта). Если поворачивать винт с правой нарезкой в сторону движения точки по окружности, то поступательное движение винта будет направлено в направлении вектора $\vec{\omega}$, (рис. 1.5).

Единица измерения угловой скорости рад/с, размерность $[\vec{\omega}] = T^{-1}$;

Линейная скорость точки $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega$, т.о. выражение связывающие линейную скорость с угловой скоростью будет иметь следующий вид

$$\upsilon = \omega R \qquad (1.21)$$

В векторной форме

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{R}] \qquad (1.22)$$

Модуль линейной скорости

$$|\vec{\upsilon}| = \omega\, R \sin(\vec{\omega}\vec{R}).$$

Если ω = *const*, то вращение равномерное и его можно характеризовать *периодом* вращения T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π.

$$\omega = 2\pi/T,$$

Таким образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.3)$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при его равномерном движении по окружности в единицу времени называется *частотой вращения*.

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \qquad \omega = 2\pi n; \qquad (1.4)$$

Среднее угловое ускорение это физическая величина, численно равная отношению изменения угловой скорости к тому промежутку времени, за которое это изменение произошло:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (1.22)$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.23)$$

Мгновенное угловое ускорение или просто угловое ускорение является первой производной угловой скорости по времени.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.24)$$

При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, а при замедленном – противоположен ему (рис.1.6).

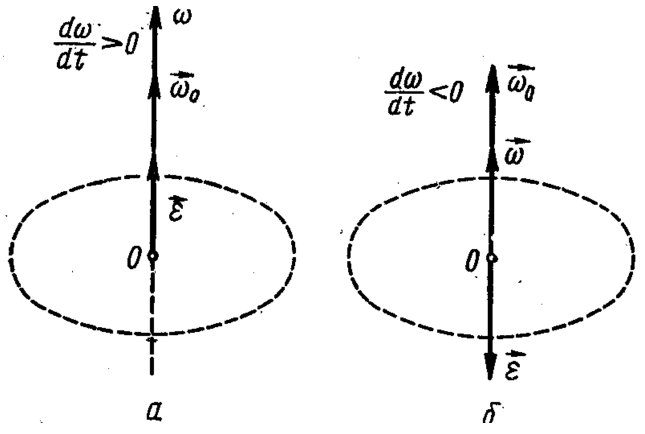

Рис. 1.6

Так как. тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},\ \text{а}\ \upsilon = \omega R,\ \text{то:}$$

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \qquad (1.25)$$

Нормальная составляющая ускорения (рис. 1.7) выражается следующей формулой

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \qquad (1.26)$$

Связь между линейными и угловыми величинами выражается следующими формулами:

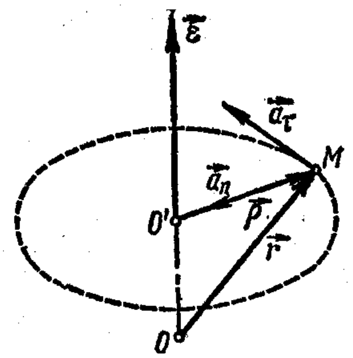

Рис. 1.7

$S = R\varphi; \upsilon = R\omega; \qquad (1.27)$

$a_\tau = R\varepsilon;$

$a_n = \omega^2 R.$

В случае равнопеременного движения точки по окружности (ε = const),

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \qquad (1.5)$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad (1.6)$$

При совпадении направления векторов угловой скорости и углового ускорения используется знак плюс, при противоположном направлении – знак минус.

1.2 Динамика материальной точки.

1.2.1 Законы Ньютона.

В основу своей механики Ньютон положил три известных закона, носящих его имя:

Первый закон Ньютона: *Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения при отсутствии воздействия со стороны других тел называется *инерцией*. Движение тела при отсутствии внешних воздействий называется движением по инерции. Поэтому 1 закон Ньютона называют законом инерции. Первый закон Ньютона установлен экспериментально. Системы отсчета, относительно которых выполняется 1 закон Ньютона, называются инерциальными. Инерциальной системой отсчета является такая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно какой-то другой инерциальной системы отсчета.

Системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется, называются неинерциальными.

1.2.2 Понятие силы, массы, импульса. Второй и третий законы Ньютона

Физическая природа взаимодействий в механике не изучается. Это задача физики в целом. Механика изучает лишь такие взаимодействия между телами, которые приводят либо к изменению механического движения тел, либо к их деформациям.

Мера взаимодействия тел, в результате которых они приобретают ускорения или деформируются, или имеет место то и другое одновременно, называется *силой*. О наличии и действии сил мы можем судить:

1. по их динамическому проявлению, т.е. по тем ускорениям, которые она сообщает взаимодействующим телам
2. по статическому проявлению сил - по деформациям, которые возникают во взаимодействующих телах.

В соответствии с этим используются два метода измерения сил:

1. Статический метод основан на сравнении сил по вызываемым ими деформациям. Этот метод применим, когда действующая сила пропорциональна деформации. Он используется в динамометрах.
2. Динамический метод основан на том, что сила является причиной изменения скорости, т.е. сила – причина ускорения. Установлено, что ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе. Таким образом сравнивая ускорения можно тем самым сравнить силы.

Различные тела под действием одной и той же силы по-разному меняют свою скорость, т.е. различные тела имеют различную инертность. Физическая величина, являющаяся мерой инертности тела, называется *массой*. Как будет показано позже, согласно закону всемирного тяготения, масса является также мерой способности тела служить источником и объектом тяготения. В связи с этим было введено понятие гравитационной массы. В настоящее время доказано, что с точностью до 10^{-12} инертная и гравитационная массы совпадают, поэтому в физике говорят просто о массе. Тождественность гравитационной и инертной масс положена Эйнштейном в основу общей теории относительности. Ньютон истолковывал массу как количество вещества в теле. Однако такое представление оказалось ошибочным. Установлено, что при движении тел со скоростями, близкими к скорости света, их масса изменяется по закону:

$$m = m_0 / \sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)},$$

хотя количество вещества в теле остаётся постоянным. Масса вещества, определяемая этой формулой, называется *релятивистской массой*. Масса вещества является аддитивной величиной, т.е. она равна сумме масс всех частиц, составляющих тело.

Количественной мерой механического движения материальной точки является её *импульс (количество движения)*. Для материальной точки импульс равен произведению массы точки на её скорость: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Импульс – величина векторная, направленная так же, как и скорость точки. Следует отметить, что, если механическое движение переходит в другие формы движения, например, тепловое, то импульс не может служить количественной мерой движения. При скоростях, близких к скорости света, импульс свободной частицы определяется по формуле:

$$p = m_0\, \upsilon / \sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}.$$

Второй закон Ньютона: *Ускорение, приобретаемое материальной точкой, пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела):*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{1.30}$$

или

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \tag{1.31}$$

В классической механике m = const, поэтому её можно внести под знак производной.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}\right), \tag{1.32}$$

где $m\vec{\upsilon} = \vec{p}$ - механический *импульс тела* (количество движения тела). Используя уравнение (1.32) второй закон Ньютона можно записать в виде:

$$\vec{F}dt = d(m\vec{\upsilon}) \quad , \tag{1.33}$$

где $\vec{F}$ dt – *импульс силы* или

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \tag{1.34}$$

Обобщенная формулировка второго закона Ньютона имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.35}$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета.

Единица силы 1 Н = 1 кг·м/с^2.

В механике большое значение имеет *принцип независимости действия сил*: Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу силы и ускорения можно разлагать на составляющие и наоборот, сумму сил, действующих на тело, можно заменить одной силой, которая называется равнодействующей или результирующей силой. Равнодействующая (результирующая) сила, равна геометрической сумме всех приложенных к телу сил

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \tag{1.36}$$

2-ой закон Ньютона позволяет рассчитать ускорение $\vec{a}$ тела массой m, если известен характер действующих на него сил, то есть их зависимость от координат и/или от скорости. В зависимости от характера этой зависимости различают следующие виды сил:

- *сила тяжести* $\vec{F} = m\vec{g}$ - направлена вертикально вниз и, так как она прямо пропорциональна массе тела, сообщает всем телам одинаковое ускорение g ≈ 9,8 м/с^2 (ускорение свободного падения); масса m здесь уже не инертная, а тяжелая[i]- мера силы тяжести.

- *сила гравитационного взаимодействия* $F_{гр} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ - определяет притяжение двух тел с массами m_1 и m_2, разделённых расстоянием r. Коэффициент γ = 6,67·10^{-11} Н·м^2/кг^2 – называется гравитационной постоянной. Масса здесь также тяжелая, выступающая в роли гравитационного заряда (двоякий смысл массы - мера инертности и мера гравитации).

- *сила упругости* $\vec{F}_y = -k\vec{x}$, где **x** – вектор линейной деформации упругого тела (вектор приращения длины относительно ее недеформированного, равновесного значения), а k - коэффициент упругости или в применении к пружине - жёсткость пружины.

- *сила вязкого сопротивления* $\vec{F} = -r\vec{v}$ где $\vec{v}$ - скорость тела в вязкой среде, r - коэффициент сопротивления среды (обычно жидкой или газообразной).

Кроме названных выше сил большое значение в решении задач механики имеют такие силы, как вес тела и сила трения, которые не имеют явного выражения через координаты или скорости:

- *весом тела* $\vec{P}$ называют силу, с которой тело действует на подвес или опору;

- *силой трения скольжения* $F_{тр}$ называют силу, прямо пропорциональную силе N нормального давления, т. е. составляющей веса тела, нормальной к поверхности опоры: $F_{тр} = \mu N$, где μ - коэффициент трения скольжения тела о поверхность. Сила трения скольжения направлена против перемещения тела и является составляющей силы реакции опоры.

Третий закон Ньютона: *Силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю, противоположны по направлению и направленными вдоль линии соединяющей тела,*. Эти силы приложены к телам всегда парами и являются силами одной природы.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ приложены к разным телам, поэтому не уравновешивают друг друга. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой величины сил и значения масс тел не изменяются. Ускорение тел в инерциальных системах отсчета также остается постоянным.

Принцип относительности Галилея: *Законы механического движения одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*.

1.2.3 Закон сохранения импульса

Совокупность взаимодействующих между собой тел образует *механическую систему*.

Если движение таково, что размеры и формы отдельных тел, образующих систему, не играют роли, то мы имеем дело с системой материальных точек.

Силы, действующие между телами, образующими систему, называются *внутренними силами*.

Силы, действующие на тела, образующих систему, со стороны тел, не входящих в данную систему, называются *внешними силами*.

Система называется замкнутой, если внешние силы отсутствуют.

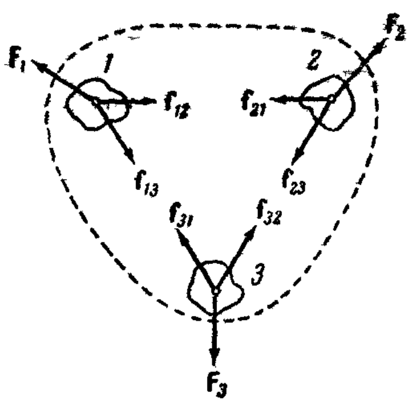

Рис. 1.8

Рассмотрим систему, состоящую из трех тел, на которую действуют внутренние и внешние силы (Рис. 1.8). Каждой из внутренних сил, например $\vec{f}_{12}$, соответствует сила $\vec{f}_{21}$, причем $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$; $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ - результирующие внешних сил, с которыми внешние тела действуют соответственно на 1-е, 2-е и 3-е тело системы.Напишем для каждого из трех тел уравнение второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} \dfrac{d(m_1\vec{\upsilon}_1)}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1 \\ \dfrac{d(m_2\vec{\upsilon}_2)}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2 \\ \dfrac{d(m_3\vec{\upsilon}_3)}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3 \end{cases} \qquad (1.77)$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма внутренних сил будет равна нулю, вследствие чего

$$\frac{d(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + m_3\vec{\upsilon}_3)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F} \qquad (1.38)$$

Если рассматриваемая система замкнутая, то результирующая внешних сил, действующих на систему, равна нулю, следовательно

$$\frac{d(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + m_3\vec{\upsilon}_3)}{dt} = 0, \qquad (1.32)$$

таким образом для замкнутой системы количество движения является постоянной величиной.

В общем случае, для замкнутой системы, состоящей из n тел, это выражение приобретает вид:

$$\frac{d(\sum_1^n m_i\vec{\upsilon}_i)}{dt} = 0 \text{ и } \sum_1^n m_i\vec{\upsilon}_i = const. \qquad (1.33)$$

Из того, что при отсутствии внешних сил

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{\upsilon}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = const\,, \qquad (1.34)$$

следует, что при процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра масс не изменяется.

При наличии внешних сил

$$d\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \vec{F}dt \qquad (1.35)$$

Таким образом, изменение полного количества движения системы тел равно импульсу результирующей внешних сил, внутренние силы не могут привести к изменению полного импульса системы. Они приводят лишь к движению отдельных частей системы друг относительно друга.

Если вдоль какой либо оси, например ОУ, составляющая результирующих внешних сил равна нулю, то количество движения вдоль этой оси не изменяется, т.е. будучи вообще не замкнутой, в направлении ОУ система может рассматриваться как замкнутая.

Как показывается в теоретической физике, закон сохранения импульса является следствием определенного физического свойства пространства - его однородности. *Однородность пространства* означает, что изменение выбора системы координат не должно отражаться на физических свойствах системы и законах ее движения.

1.2.4 Центр масс. Движение центра масс механической системы.

Центром масс системы материальных точек с координатами x_1 и x_2 называется точка x_c делящая расстояние между ними на части обратно пропорциональные их массам. Для двух точек:

$$\frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (1.36)$$

Отсюда

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1.37)$$

Для системы, состоящей из n тел,

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad (1.38)$$

В общем случае

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \tag{1.39}$$

Из определения координат центра масс имеем:

$$\begin{cases} X_C = \dfrac{\sum(m_i X_i)}{\sum m_i} \\ Y_C = \dfrac{\sum(m_i Y_i)}{\sum m_i} \\ Z_C = \dfrac{\sum(m_i Z_i)}{\sum m_i} \end{cases} \tag{1.40}$$

Продифференцируем эти уравнения по времени:

$$\begin{cases} \sum m_i \dfrac{dX_C}{dt} = \sum m_i \dfrac{dX_i}{dt} \\ \sum m_i \dfrac{dY_C}{dt} = \sum m_i \dfrac{dY_i}{dt} \\ \sum m_i \dfrac{dZ_C}{dt} = \sum m_i \dfrac{dZ_i}{dt} \end{cases} \tag{1.41}$$

В равенствах (1.41) слева стоит произведение суммарной массы тел $\sum m_i =$ M, образующих систему, и компонент $\dfrac{dX_c}{dt}, \dfrac{dY_c}{dt}, \dfrac{dZ_C}{dt}$, представляющих собой составляющие скорости движения центра масс системы по осям координат, а справа – компоненты вектора полного количества движения тел системы:

$$M\vec{\upsilon}_C = \sum m_i \vec{\upsilon}_i \tag{1.42}$$

Полное количество движения механической системы равно количеству движения материальной точки с массой, равной массе тел системы и движущейся как движется её центр масс.

Продифференцировав выражение (1.42) по времени и сравнив с формулой $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{\upsilon})$, выражающей второй закон Ньютона, получим:

$$\frac{d(M\vec{\upsilon}_C)}{dt} = \frac{d(\sum m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt} \qquad (1.43)$$

где $d(M\vec{\upsilon}_C)$-количество движения центра масс системы, $\vec{F}$ - вектор результирующей внешних сил, действующих на тела системы.

Центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена масса всех тел системы, под действием результирующей внешних сил, приложенных к телам, образующим систему.

Если механическая система замкнута, то $\vec{F} = 0$ и

$$M\vec{\upsilon}_C = const. \qquad (1.43а)$$

Формула (1.43а) – математическое выражение закона сохранения импульса для механической системы материальных точек:

Центр масс замкнутой механической системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

1.2.5 Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея.

До сих пор мы рассматривали движение относительно тел отсчета, жестко связанных с Землей, которую мы считали неподвижной. Естественно поставить вопрос: будут ли законы динамики, полученные для систем отсчета, связанных с неподвижными телами, справедливы для систем отсчета, связанных с движущимися телами?

Рассмотрим наиболее простой случай - движение тела относительно равномерно и прямолинейно движущихся систем отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{V}$ (рис. 1.9). Одну из этих систем (К) будем условно считать неподвижной. Другая же система (К') пусть движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{V}$ относительно первой. Движение тела в подвижной системе отсчета называется *относительным движением*, а в условно неподвижной - *абсолютным движением*. Движение тела относительно неподвижной системы отсчета, которым оно обладало бы, будучи жестко связанным с одной из точек подвижной системы, называется *переносным движением*.

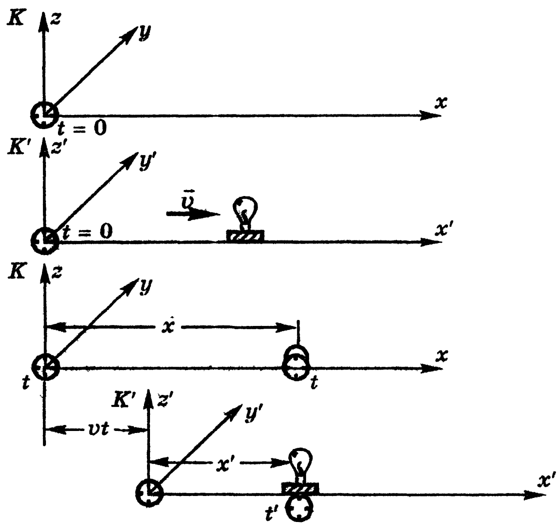

Рис. 1.9

Примем для простоты, что оси x и x' совпадают, а скорость относительного движения $\vec{\upsilon}_0$ направлена вдоль оси x или x'. На рисунке для наглядности системы координат K и K' показаны отдельно.

Преобразования координат для рассмотренного случая имеют вид:

$$x = x' + \vec{\upsilon}_0 t;$$
$$y' = y;$$
$$z' = z; \qquad (1.44)$$

Соотношения (1.44) называются преобразованиями Галилея. Дифференцируя формулы (1.44) по времени, получим классический закон сложения скоростей:

$$\upsilon_X = \upsilon_X^/ + \vec{\upsilon}_0$$
$$\upsilon_y = \upsilon_y^/$$
$$\upsilon_z = \upsilon_z^/ \qquad (1.45)$$

Здесь $\upsilon_x^/$, $\upsilon_y^/$, $\upsilon_z^/$ - это проекции вектора относительной скорости тела $\upsilon^/$ (по отношению к системе отсчета *К'),* а υ_x, υ_y, υ_z - это проекции вектора абсолютной скорости υ (по отношению к системе отсчета *К).* В векторной форме закон сложения скоростей имеет вид

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0 .$$

Компоненты ускорений в подвижной и неподвижной системах отсчета будут одинаковыми, т.е. абсолютное ускорение тела будет равно относительному.

Отсюда вытекает механический принцип относительности Галилея. Согласно этому принципу все законы механики должны иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, описывающие законы механики, должны быть инвариантными по отношению к преобразованиям Галилея.

Принцип относительности Галилея можно сформулировать и по-другому: при одинаковых условиях все механические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают совершенно одинаково.

1.2.6 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Системы отсчета, движущиеся ускоренно относительно одной из инерциальных систем отсчета, называются неинерциальными.

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга со скоростью $\vec{\upsilon}_П$, являющейся функцией времени. Одну из этих систем (К) будем условно считать неподвижной. Другая же система (К') пусть движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{\upsilon}_П$ (t) относительно первой. Как и в предыдущем случае примем, что оси x и x' совпадают, а скорость относительного движения $\vec{\upsilon}_П$ направлена вдоль оси *x* или *x'*. Преобразования координат в этом случае будут иметь вид:

$$x = x' + \upsilon_n t;$$
$$y' = y; \qquad (1.45)$$
$$z' = z;$$

Дифференцируя формулы (1.45) по времени, получим закон сложения скоростей:

$$\upsilon_x = \upsilon_x' + \upsilon_n(t);$$
$$\upsilon_y = \upsilon_y'; \qquad (1.46)$$
$$\upsilon_z = \upsilon_z';$$

Здесь υ_x', υ_y', υ_z' - это проекции вектора относительной скорости тела υ' (по отношению к системе отсчета *К')*, а υ_x, υ_y, υ_z - это проекции вектора абсолютной скорости υ (по отношению к системе отсчета *К)*. В векторной форме закон сложения скоростей имеет вид

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}^{/} + \vec{\upsilon}_{пер}$$

Ускорения будут связаны соотношениями:

$$a_x = a'_x + a_n$$
$$a_y = a'_y \qquad (1.47)$$
$$a_z = a'_z$$

или в векторной форме:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{пер} \qquad (1.48)$$

Уравнение движения материальной точки, массой m, на которую действует сила $\vec{F}$ относительно неподвижной системы отсчета, будет иметь вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m(\vec{a}' + \vec{a}_{пер}) = \vec{F};$$

отсюда:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_{пер} = \vec{F} + \vec{F}_{ин}$$

Второй закон Ньютона в системах отсчета, движущихся с ускорением, включает в число сил, действующих на тело, взятое с обратным знаком произведение массы тела на переносное ускорение. Это произведение, учитывающее ускоренное движение системы отсчета, носит название силы инерции. Для составления уравнений движения тела относительно системы отсчета, движущейся с ускорением, к результирующей сил, действующих на тело, надо добавить силу инерции.

Во вращающейся системе отсчета на покоящееся тело действует *центробежная сила инерции*, которая направлена по горизонтали от оси вращения диска и равна

$$F_{цб} = m\omega^2 R; \qquad (1.49)$$

При движении тела относительно неинерциальной системы отсчета на него действует сила Кориолиса $\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}'\vec{\omega}]$. Вектор $\vec{F}_к$ лежит в плоскости диска и перпендикулярен векторам скорости υ' тела и угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ системы отсчета, его направление находится в соответствии с правилом правого винта.

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета имеет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_к \qquad (1.50)$$

1.3 Работа и энергия

1.3.1 Работа, энергия, мощность

Энергия - универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. В механике различают два вида энергии : энергию определяемую скоростями тел - *кинетическую энергию* и энергию, которая зависит от взаимного положения тел - их *потенциальную энергию*.

Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие *работы силы*.

Работа - мера передачи механического движения от одного тела к другому или превращение его в другие виды движения в процессе взаимодействия.

Механическая энергия является физической величиной, характеризующей способность тела или системы тел совершать работу; она измеряется величиной работы, которую при определенных условиях может совершить эта система.

Если тело движется *прямолинейно* и на него действует постоянная сила $\vec{F}$, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы F_S, на направление перемещения ($F_S = F\cos\alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_S S = FS\cos\alpha. \qquad (1.51)$$

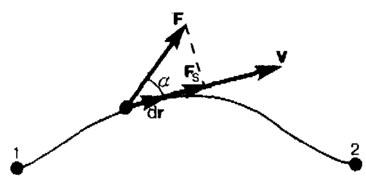

Рис. 1.10

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (1.51) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r}$, то силу $\vec{F}$ можно считать постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным. Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется *скалярная* величина

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = FdS\cos\alpha = F_s dS \qquad (1.52)$$

где $dS = |\,dr\,|$ - элементарный путь; α - угол между направлениями элементарного перемещения $d\vec{r}$ и силы $\vec{F}$, F_s - проекция $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

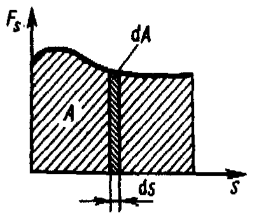

Рис. 1.11

Суммируя элементарные работы, можно найти работу на любом протяжении траектории. Работа на графике F_S-S определяется площадью заштрихованной фигуры. Единица работы - джоуль (Дж).

Мощность

$$N = dA/dt = N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} \qquad (1.53)$$

N- величина скалярная. Единица мощности - 1 Вт = 1Дж/с. 1 л.с. = 735 Вт.

Если на тело действует несколько сил, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$, то

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + ... + \vec{F}_n d\vec{r}$$

т.е. она равна сумме работ на этом перемещении сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n$.

1.3.2 Работа силы и кинетическая энергия.

Пусть в пространстве существует стационарное силовое поле, например, поле тяготения, создаваемое некоторым телом, которое будем считать точечным. Примем, что тело является одновременно и телом отсчета. Если в некоторую точку М поля поместить другое тело (м.т.), то на него будет действовать сила, зависящая от расстояния r от источника. Работа, совершаемая в стационарном поле при перемещении тела из некоторой точки M_1 в точку M_2 равна

$$A_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}d\vec{r} \qquad (1.54)$$

и в общем случае зависит от формы и длины пути от M_1 до M_2.

Выразим работу A_{12} через разность кинетических энергий тела в точках M_1 и M_2. Выберем какое-либо элементарное перемещение dr на криволинейном пути от точки M_1 до точки M_2. Спроектируем теперь силу и ускорение во втором законе Ньютона $F = ma$ на направление dr. Принимая во внимание, что величина тангенциального ускорения

$$a_\tau = a\cos\alpha = \frac{d\upsilon}{dt},$$

где α — угол между векторами *F* и *dr* , получим:

$$F\cos\alpha = m\frac{d\upsilon}{dt}$$

После умножения левой части этого уравнения на *dS,* а правой на $\upsilon dt = dS$ формула для элементарной работы примет вид

$$dA = FdS\cos\alpha = m\upsilon d\upsilon \qquad (1.55)$$

Пусть в начальной точке пути скорость тела равна υ_1, а в конечной точке пути его скорость стала равной υ_2. Тогда после интегрирования получим

$$A_{12} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} mvdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (1.56)$$

Отсюда вытекает формула, определяющая кинетическую энергию тела

$$W_\kappa = \frac{mv^2}{2} + C\ , \qquad (1.57)$$

где *C* — произвольная постоянная. В классической физике обычно эту постоянную считают равной нулю.

Легко видеть, что (1.57) можно переписать в следующем виде:

$$A_{12} = W_{K2} - W_{K1} \qquad (1.58)$$

Если на тело действует сила трения, то некоторая часть механической энергии, которой обладало тело, перейдет в молекулярно тепловое движение и изменение кинетической энергии будет меньше работы совершенной силой.

Работа, которую совершает движущееся тело при торможении до полной остановки, не зависит от траектории движения, и от того, каким образом производится торможение. Она равна кинетической энергии тела.

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий тел, составляющих систему.

В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а, следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Т.о. кинетическая энергия зависит от системы отсчета.

1.3.3 Потенциальная энергия

Потенциальная энергия - механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Если работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это движении произошло, а зависит только от начального и конечного положений тела, то такие силы называются *консервативными* или *потенциальными*. Поля, в которых действуют консервативные силы называются потенциальными. Работа консервативных сил на замкнутом пути равна нулю. Математически это означает, что подынтегральное выражение в (1.54) равно взятому со знаком минус полному дифференциалу функции $W_n(r)$, которая называется потенциальной энергией системы:

$$dA = - dW_n(r). \tag{1.59}$$

Таким образом, потенциальная энергия — это физическая величина, элементарное изменение которой равно элементарной работе (взятой со знаком минус), совершаемой силами поля.

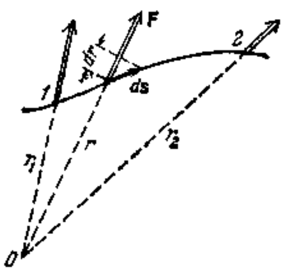

Рис. 1.12

Интегрируя соотношение (1.59) от точки M_1 до точки M_2, получим уравнение, связывающее конечную работу сил поля с разностью потенциальных энергий в указанных точках:

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2} = - (W_{n2} - W_{n1})$$

Отсюда вытекает, что физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий. Условимся считать, что когда тело находится на бесконечности ($r = \infty$), то его потенциальная энергия равна нулю. Тогда под $W_n(r)$ следует понимать работу, совершаемую силами поля при перемещении тела из точки M в бесконечность.

Силы являются *консервативными* тогда, когда в системе нет перехода механического движения в другие формы движения материи или превращения других форм движения материи в механическое.

Силы, работа которых возрастает по величине при увеличении пути независимо от того, замкнут путь или нет, называются *диссипативными*. В этом случае механическая энергия переходит во внутреннюю и работа сил определяется неоднозначно.

Рассмотрим движение тела в поле центральных сил.

Рассчитаем работу внешних сил $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{F}$ при перемещении пробного тела массой m из положения 1 в положение 2 без изменения кинетической энергии ($\vec{F}_{внеш} = -\vec{F}_{грав}$):

$$dA=F_{внеш}\cdot dS\cdot cos\alpha = F_{внеш}dr$$

где dr -проекция перемещения на направление силы.

$$A_{12} = \gamma mM\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r^2} = \gamma mM(-\frac{1}{r})|_{r1}^{r2} = -\gamma mM\frac{1}{r}|_{r1}^{r2} ;$$

$$A_{12} = -\gamma mM\frac{1}{r_2} - (-\gamma mM\frac{1}{r_1}) = \gamma mM(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \qquad (1.60)$$

$$A_{12} = U_2 - U_1;$$

$$U_2 = -\gamma mM\frac{1}{r_2} + U_0; \quad U_1 = -\gamma mM\frac{1}{r_1} + U_0; \quad U_1 \to U_0$$

при $r_1 \to \infty$; т.е. U_0 – потенциальная энергия пробного тела на бесконечном удалении от тела, создающего поле, обычно полагают, что $U_0 = 0$, тогда

$$U = -\gamma mM\frac{1}{r} \qquad (1.61)$$

U равна той работе, которую совершают внешние силы при перемещении тела массой m без изменения кинетической энергии из бесконечности в данную точку поля. Работа отрицательна, т.к. угол между силой и перемещением тупой и $cos\alpha < 0$.

Абсолютное значение потенциальной энергии в данной точке не имеет особого физического смысла: физический смысл имеет разность энергий между двумя точками, равная работе при перемещении тела между этими точками.

Относительной величиной является и кинетическая энергия, т.к. скорость имеет относительное значение, зависящее от выбора системы отсчета. Существенное значение имеет не абсолютное значение кинетической энергии, а только ее изменение. Проявляющаяся при совершении работы.

В поле консервативных сил потенциальная энергия и сила связаны соотношением:

$$F_{конс} = -\frac{dW_n}{dr} \qquad (1.62)$$

где dr - элемент длины в направлении действия силы, т.е. в направлении наиболее резкого изменения потенциальной энергии. Знак “-“ показывает, что $F_{конс}$ направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Для гравитационного поля

$$W = -\gamma \frac{mM}{r}; \qquad F_{грав} = \frac{dW}{dr}; \qquad \vec{F}_{грав} = -\gamma \frac{mM}{r^3}\vec{r} \tag{1.63}$$

Знак минус означает, что сила тяжести направлена в сторону уменьшения $\vec{r}$, т.е. к центру притяжения.

1.3.3 Потенциальная энергия растянутой пружины или стержня.

Рассчитаем работу внешней силы, изменяющейся пропорционально смещению точки F = kx на пути от $x_0 = 0$ до **x.**

$$A = \int_{x_0}^{x} F_{внеш} dx = k \int_{x_0}^{x} x dx = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} \tag{1.64}$$

Такую работу совершает внешняя сила, растягивающая пружину или стержень статически (т.е. настолько медленно, что в каждый момент времен $F = -F_{упр}$).

Работа силы упругости при растяжении на Δx :

$$A = \int_{0}^{\Delta x} F_{óïð}\, dx = -k\int_{0}^{x} x dx = -\frac{k\Delta x^2}{2} \tag{1.65}$$

Отрицательный знак работы указывает, что сила направлена противоположно смещению точки приложения силы.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$W_{ï} = \frac{k\Delta x^2}{2} \tag{1.66}$$

1.3.4 Закон сохранения механической энергии.

Закон сохранения энергии — результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М. В. Ломоносову (1711—*1765),* изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814—1878) и немецким естествоиспытателем Г. Г.Гельмгольцем (1821—1894).

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots m_n$, движущихся со скоростями $\upsilon_1, \upsilon_2 \ldots \upsilon_n$. Пусть $\boldsymbol{F_1}'$, $\boldsymbol{F_2}'$ ..., $\boldsymbol{F_n}'$, — равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, ..., $\boldsymbol{F_n}$, — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$.

При $\upsilon << c$ массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} &= \vec{F}_1^{/} + \vec{F}_1 + \vec{f}_1 \\ m_2 \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} &= \vec{F}_2^{/} + \vec{F}_2 + \vec{f}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} &= \vec{F}_n^{/} + \vec{F}_n + \vec{f}_n \end{aligned} \tag{1.67}$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные $d\boldsymbol{r}_1, d\boldsymbol{r}_2, ..., d\boldsymbol{r}_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\upsilon}_i\, dt$, получим

$$\begin{aligned} m_1(\vec{\upsilon}_1 d\vec{\upsilon}_1) - \left(\vec{F}_1^{/} + \vec{F}_1\right)d\vec{r}_1 &= \vec{f}_1 d\vec{r}_1 \\ m_2(\vec{\upsilon}_2 d\vec{\upsilon}_2) - \left(\vec{F}_2^{/} + \vec{F}_2\right)dr_2 &= \vec{f}_2 d\vec{r}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n(\vec{\upsilon}_n d\vec{\upsilon}_n) - \left(\vec{F}_n^{/} + \vec{F}_n\right)d\vec{r}_n &= \vec{f}_n d\vec{r}_n \end{aligned} \tag{1.68}$$

В этом уравнении первый член представляет собой изменение кинетической энергии W_K, второй – изменение потенциальной энергии системы W_n, а $\vec{f}_i d\vec{r}_i$ - работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему:

$$d(W_K + W_n) = \delta A. \tag{1.69}$$

При переходе системы из состояния 1 в состояние 2

$$dA = -dW_{i}(r), \tag{1.70}$$

т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, т.е. система замкнутая, то

$$d(W_K + W_n) = 0$$

и

$$W_K + W_n = const. \qquad (1.71)$$

Это уравнение и является математической записью закона сохранения механической энергии: *в замкнутой системе полная механическая энергия есть величина постоянная.*

1.4 Динамика твердого тела.

1.4.1 Момент силы и момент импульса относительно оси.

Уравнение движения вращающегося тела

Различают два основных вида вращательного движения твердого тела:

1) *вращение вокруг неподвижной точки O*, при котором все точки тела движутся по поверхностям концентрических сфер с центром в точке O;

2) *вращение вокруг неподвижной оси* Z; при котором все точки тела вращаются по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, являющейся осью вращения Z.

При анализе вращательного движения твердого тела целесообразно перейти от линейных характеристик, удобных в описании поступательного движения, к специфическим характеристикам вращательного движения (и взаимодействия). В качестве кинематических характеристик таковыми являются угловые характеристики: угол поворота φ, угловая скорость $\omega = d\varphi/dt$ и угловое ускорение $\varepsilon = d\omega/dt$.

При переходе к изучению вращательного движения динамические характеристики также модифицируются. Векторные меры движения и взаимодействия, соответственно импульс $\vec{P}$ и сила $\vec{F}$, заменяются во вращательном движении на момент импульса $\vec{L}$ и момент силы $\vec{M}$, а мера инертности, масса m , на момент инерции J.

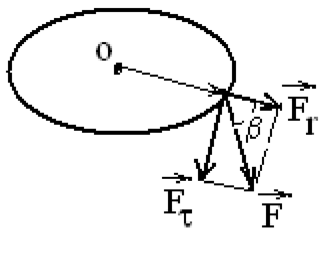

Рис. 1.13

Момент силы $\vec{M} = [\vec{R}, \vec{F}]$ *– векторная величина (псевдовектор) – его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от* $\vec{R}$ *к* $\vec{F}$. Его модуль в СИ выражают в ньютонметрах (Н·м).

Наименьшее расстояние от оси вращения до линии действия силы l называется *плечом силы относительно оси вращения.*

Выведем основное уравнение динамики вращательного движения. Пусть к элементу твердого тела с массой Δm_i приложена внешняя сила $\vec{F}$ (Рис.1.13). Под действием тангенциальной составляющей этой силы

$F_{\tau i} = F_i \sin\beta_i$ масса Δm_i приобретает тангенциальное ускорение $a_{\tau i}$.

По II закону Ньютона

$$\Delta m_i a_{\tau i} = F_{\tau i};$$

$$\Delta m_i r_i^2 \varepsilon = r_i F_{\tau i}; \quad \sum_{i=1}^{i=n} \Delta m_i r_i^2 \varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} r_i F_{\tau i}, \qquad (1.71)$$

где $\sum_{i=1}^{i=n} r_i F_{\tau i} = M_z$ – момент силы относительно оси Z,

$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta m_i r_i^2 = J_z$ – момент инерции тела относительно оси Z.

$$M_Z = \varepsilon J_Z = J_Z \frac{d\omega_Z}{dt} = \frac{d(J_Z \omega_Z)}{dt} \qquad (1.72)$$

$J_z \omega_z = L_Z$ - момент импульса тела относительно оси Z.

Уравнение (1.72) называется основным уравнением динамики вращательного движения: *скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси равна действующему на тело результирующему моменту внешних сил относительно этой оси..*

При $M_Z = 0$,

$$\frac{d(J_Z \omega_Z)}{dt} = 0.$$

Таким образом, мы получили закон сохранения момента импульса тела, вращающегося около закрепленной оси:

$$J_Z \omega_Z = const \qquad (1.72а)$$

Выражение (1.72а) справедливо и для замкнутой **системы тел**, вращающихся вокруг неподвижной оси:

$$\sum J_Z \omega_Z = const$$

В замкнутой системе суммарный момент импульса тел, входящих в систему, относительно закреплённой оси есть величина постоянная.

1.4.2 Вычисление момента инерции некоторых тел

В общем случае, если тело сплошное, оно представляет собой множество точек с бесконечно малыми массами *dm*, и момент инерции тела определяется интегралом

$$J = \int_0^m r^2 dm \qquad (1.73)$$

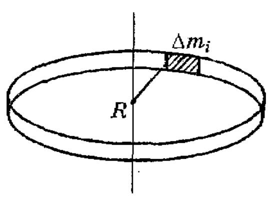

Рис. 1.14

Пределы интегрирования определяются размерами и формой тела. Момент инерции тела зависит от формы тела, относительно какой оси вращается тело и от распределения массы по объему тела.

Теорема Штейнера: Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту инерции J_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела m на квадрат расстояния между осями.

$$J = J_C + md^2 \tag{1.74}$$

1. Момент инерции однородного обруча относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через его центр.

Будем считать толщину обруча постоянной, разобьем обруч на малые элементы Δm_i; (Рис. 1.14) . Момент инерции относительно оси выразится выражениями

$$J = \sum \Delta m_i R^2 = mR^2, \quad J = mR^2;$$

т.е. равен произведению массы на квадрат радиуса.

2. Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс и через один из концов стержня.

Разобьем стержень на малые элементы. Момент инерции относительно оси одной половины стержня равен $J' = \sum \Delta m_i r_i^2$, а всего стержня $J = 2J'$, $J = 2\sum \Delta m_i r_i^2$. Если ΔS - сечение стержня, ρ - плотность материала, то $\Delta m = \rho \Delta S \Delta r$;

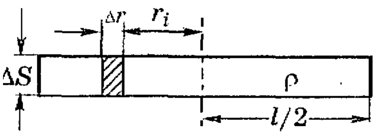

Рис. 1.14а

$$J_C = 2\Sigma\rho\Delta S r_i^2 \Delta r = 2\rho\Delta S \Sigma r_i^2 \Delta r$$

В пределе операция суммирования переходит в интегрирование

$$J_C = 2\rho\Delta S \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = 2\rho\Delta S \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{\Delta S \rho l^3}{12}.$$

Так как $m = \rho \Delta S$ - масса стержня, то

$$J_C = \frac{ml^2}{12};$$

Если ось вращения параллельна данной и проходит через один из концов стержня, то для нахождения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера:

$$J = J_c + md^2; \; d = l/2; \; J = ml^2/3; \tag{1.75}$$

1.4.3 Работа внешних сил при вращении твердого тела. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим теперь вращение тела с энергетической точки зрения. Допустим, что в некоторой точке тела приложена сила (в плоскости, перпендикулярной оси вращения), направление которой совпадает с вектором линейной скорости этой точки. Поэтому речь идет о силе $\vec{F} = \vec{F}_\tau$. Элементарная работа этой силы равна $dA = F_\tau ds$, где ds — элемент дуги окружности, связанный, как известно, с ее радиусом r и углом поворота φ следующим образом: $dS = rd\varphi$;

Тогда $dA = F_\tau rd\varphi$ или

$$dA = M\Delta\varphi \tag{1.76}$$

Если $M = const$, то при повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$, формула для работы имеет вид $A = M\Delta\varphi$;

Найдем теперь кинетическую энергию вращающегося тела. Очевидно, эта энергия должна быть равна сумме кинетических энергий отдельных материальных точек, т.е. $W_K = \sum\frac{m_i\upsilon_i^2}{2}$, Но $\upsilon_i = \omega r_i$ и, принимая во внимание, что момент инерции тела относительно оси вращения $J = \sum m_i r_i^2$, получим

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2} \tag{1.77}$$

Сравнивая полученное выражение с выражением для кинетической энергии тела, движущегося поступательно $W_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$, приходим к выводу, что *момент инерции* вращательного движения - мера инертности тела.

Работа A, совершенная моментом внешних сил на протяжении угла поворота $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, связана с изменением кинетической энергии вращения тела следующим образом $A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$; где ω_2 и ω_1 — угловые скорости тела в моменты, когда его угловые координаты равны соответственно φ_2 и φ_1.

Если тело катится без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения

$$W_{катящ} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2} \tag{1.78}$$

где m — масса катящегося тела; v_c — скорость центра масс тела;

J_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω - угловая скорость тела.

1.5.1 Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца.

Классическая механика Ньютона, как теория движения, долгое время находилась в полном согласии с опытом, пока не были проведены эксперименты по определению скорости света. Применение элементарного преобразования Галилея относительно движущегося приемника или источника приводит к тому, что скорость света относительно движущегося приемника должна определяться как $c_R = c \pm \upsilon$, где υ – скорость приемника, который движется навстречу источнику (+) или от него (-) .

Однако многочисленные попытки подтвердить это равенство оказались безуспешными. Во всех экспериментах с движущимся источником скорость света оказывалась неизменной в свободном пространстве $c_R = c$, т.е. имела одно и то же значение во всех системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно источника света. Другими словами, скорость света оказалась инвариантной для, инерциальных систем отсчета.

В связи с этим было признано, что механика Ньютона является ограниченно справедливой, т.е. справедлива для движения больших масс и малых скоростей, где ее выводы хорошо совпадают с практикой. В результате возникла необходимость создания новой, более всеобъемлющей механики, которая включала бы механику Ньютона, как частный предельный случай для малых скоростей.

Такую теорию в 1906 г. предложил Эйнштейн. Она получила название специальной (частной) теорий относительности. В основу теории Эйнштейн положил два постулата:

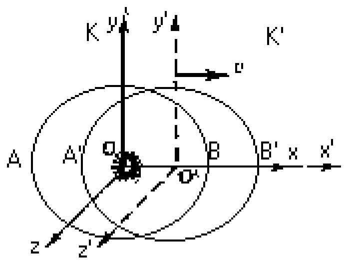

Рис. 1.15

1. *Принцип относительности*, который является обобщением принципа относительности Галилея на любые физические процессы. Он формулируется следующим образом:

Все физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах. Или другими словами: все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны (не изменяются) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Таким образом, никаким опытом нельзя, в принципе, выделить предпочтительную инерциальную систему, они все эквивалентны.

2. *Скорость света в вакууме не зависит от движения источника и одинакова во всех направлениях*, т.е. скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах и является предельной.

Из этого постулата следует, что никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Это положение принципиально отличается от положенного в основу механики Ньютона положения, что взаимодействие тел распространяется мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью.

В специальной теории относительности, в отличие от механики Ньютона, при переходе от одной системы координат к другой, преобразования координат и времени должны быть такими, чтобы (в отличие от преобразований Галилея) значение скорости света было независимо от движения источника.

Такая форма преобразования координат и времени получила название преобразований Лоренца. Обозначения координаты и время в системе К' буквами со значком «'» преобразования Лоренца можно записать в виде:

$$x' = \frac{x-\upsilon_0 t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}; \qquad x = \frac{x'+\upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$$

$$y' = y; \qquad y = y'$$

$$z' = z; \qquad z = z' \qquad (1.104)$$

$$t' = \frac{t-\frac{\upsilon_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}; \qquad t = \frac{t'+\frac{\upsilon_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}};$$

Из преобразований Лоренца следует, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. В закон преобразования координат входит время, в закон преобразования времени- координаты. Устанавливается взаимосвязь пространства и времени.

1.5.2 Релятивистская кинематика

1. Из преобразований Лоренца видно, что относительные скорости имеют верхнюю границу $\upsilon < c$, при $\upsilon > c$ $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ становится мнимым и координаты x' и t' теряют физический смысл.

2. Движущиеся тела изменяют свои размеры. Пусть стержень расположен вдоль оси O'X' и движется вместе с системой отсчета S'.

$$l_0' = x_2' - x_1' = const;$$

Значок «’» показывает, что длина *l* измеряется в системе отсчета *S’*, индекс нуль – что в данной системе отсчета стержень покоится.

Измерим координаты концов стержня x_1 и x_2 в системе отсчета *S* в один и тот же момент времени *t* этой системы. Эти события в системе *S’* будут неодновременными.

$$l_0' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}; \qquad (1.105)$$

$$l = l_0' \sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}; \qquad (1.106)$$

Из симметрии преобразований Лоренца следует, что если бы стержень длиной l_0 покоился в системе *S* и мы измеряли бы координаты его концов в движущейся системе *S’* в один и тот же момент времени этой системы *t’*, то его длина *l’* по отношению к l_0 укоротилась бы в то же число раз.

$$l' = l_0 \sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}. \qquad (1.107)$$

3. В движущейся системе изменяется ход течения времени.

Пусть в некоторой точке x_0' движущейся системы O’X’Y’Z’ произошли два последовательных события в моменты времени t_1' и t_2'. Для простоты будем говорить о показаниях часов, помещенных в точку x_0’ и неподвижных относительно *S’*.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\frac{t_2' + \frac{\upsilon_0}{c^2}x'}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} - \frac{\frac{t_1' + \frac{\upsilon_0}{c^2}x'}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \qquad (1.108)$$

Следя из системы *S* за движущимися относительно нее часами, мы обнаружим, что эти часы идут медленнее.

При изучении движения элементарных частиц (мезонов) получены прямые подтверждения изменения хода времени в системе, связанной с Землей, по сравнению с системой, связанной с быстродвижущимся мезоном. Мезон — нестабильная частица, несущая единичный элементарный положительный заряд; масса его превышает массу электрона в 270 раз. Установлено что в системе, где мезон покоится, время его жизни равно $t_0=2{,}5\cdot 10^{-8}$ с.

Однако имеются, данные, свидетельствующие о возможности регистрации мезона на расстоянии сотен метров от места его рождения (в системе отсчета, связанной с Землей). С классической точки зрения путь, который способен пройти мезон до своего распада, равен: $l_0 \approx ct_0$= 7,5 м, так как скорость мезона очень близка к скорости света. Эта величина в сотни раз меньше пути, оцениваемого земным наблюдателем. Дело в том, что в системе отсчета, связанной с Землей, время жизни мезона составляет:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0{}^2}{c^2}}} \approx 100\ t_0.$$

За это время мезон может пройти путь, равный 750 м, что соответствует опытным данным.

Прямых опытов, дающих возможность измерить сокращение длины, пока не имеется, но справедливость этого заключения доказывается справедливостью специальной теории относительности в целом.

1.5.3 Релятивистский закон сложения скоростей.

В системе *S'* точка движется с относительной скоростью

$$\upsilon' = \frac{x'}{t'}\,.$$

Система S' движется относительно системы *S* в том же направлении с переносной скоростью υ_0. Определим, чему равна абсолютная скорость материальной точки υ.

$$\upsilon = \frac{x}{t}\,. \tag{1.109}$$

Пусть при $t = t' = 0$, $x = x' = 0$, т.е. точка находится в начале координат.

Из преобразований Лоренца следует, что

$$x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0{}^2}{c^2}}}\,, \tag{1.110}$$

Время определяется по следующей формуле

$$t = \frac{t' + \frac{\upsilon_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}\,, \tag{1.111}$$

тогда

$$\upsilon = \frac{x}{t} = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{t' + \frac{\upsilon_0 x'}{c^2}} = \frac{\frac{x'}{t'} + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0 x'}{c^2 t'}}\ ; \qquad (1.112)$$

Т.к. $\frac{x'}{t'} = \upsilon'$, то

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon' \upsilon_0}{c^2}}\ . \qquad (1.113)$$

При $\upsilon' << c$, $\upsilon_0 << c$, $\frac{\upsilon' \upsilon}{c^2} << 1$ и $\upsilon = \upsilon' + \upsilon_0$.

При $\upsilon' = c$ (для фотона),

$$\upsilon = \frac{c + \upsilon_0}{1 + \frac{c\upsilon_0}{c^2}} = c, \qquad (1.114)$$

т.е. преобразования Лоренца удовлетворяют постулату Эйнштейна.

1.5.4 Интервал между событиями

Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значения которых в разных системах отсчета разные. Это дало основание объединить пространство и время в единый 4-х мерный мир с четырьмя координатными осями: X,U, Z, t. Расстояние между двумя точками-событиями в этом мире называется интервалом S_{12} и выражается соотношением:

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} \qquad (1.112)$$

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}; \quad t_{12} = t_2 - t_1 \qquad (1.113)$$

1.5.5 Основной закон релятивистской механики.

Эйнштейн показал, что форма записи второго закона Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ сохраняется, если $\vec{p}$ понимать релятивистский импульс

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1.114)$$

Основной закон динамики материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right) \qquad (1.115)$$

Релятивистская масса (масса тела *m,* движущегося со скоростью $\upsilon \sim c$) связана с массой покоящегося тела соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1.116)$$

Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

Масса и энергия релятивистской частицы взаимосвязаны и возможны их взаимные превращения.

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2} \qquad (1.117)$$

Полная релятивистская энергия, инвариантная относительно систем отсчета, определяется выражением:

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1.118)$$

При $\upsilon = 0$, имеем $W_0 = m_0c^2$ – эта энергия представляет собой *внутреннюю энергию частицы*, не связанную с движением частицы как целого.

В релятивистской механике *полная энергия* частицы равна сумме кинетической энергии T и энергии покоя W_0.

$$W = W_0 + T;$$

Отсюда

$$T = W - W_0 = (m - m_0)c^2.$$

Из выражения для энергии

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (1.119)$$

и выражения для импульса

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1.120)$$

удается образовать инвариант, т.е. величину, не изменяющуюся при преобразованиях Лоренца:

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c = inv^2, \qquad (1.121)$$

или

$$W^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \qquad (1.122)$$

1.6 Элементы механики жидкостей и газов.

1.6.1 Давление в жидкости и газе.

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т.е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Как и газ, жидкость принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом отличаются, в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому гидроаэромеханика — раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми или твердыми телами — использует единый подход к изучению жидкостей и газов.

В механике жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные тела в занятой ими части пространства. Плотность жидкости мало зависит от давления и во многих задачах можно пользоваться понятием *несжимаемой жидкости* — жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Жидкости имеют следующие наиболее характерные свойства.

Типичные жидкости (вода, бензин, спирт и т.п.) не имеют трения покоя, частицы их очень подвижны. В других жидкостях имеется вязкость (внутреннее трение) — это мед, масло, вар и т.п. Однако при продолжительном действии силы частицы вязкой жидкости тоже становятся подвижными. Это свойство выражается так: жидкости не имеют упругости формы, для них модуль сдвига равен нулю.

Практически все жидкости несжимаемы. Это значит, что для них коэффициенты сжатия имеют очень малые значения. Следовательно, приближенно можно считать все жидкости невязкими и несжимаемыми: *такие жидкости называются идеальными*.

Еще В.Паскаль (1623-1662) установил, что давление на жидкость передается ею равномерно во все стороны (закон Паскаля).

Действие силы тяжести приводит к возникновению разности давлений между горизонтальными слоями жидкости находящимися на различной глубине. Разность сил давления в слоях *АВ* и *СД* (рис. 1.16) равна весу вертикального столба жидкости с основанием S и высотой h_1. При поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ сила давления на слой находящийся на глубине *h* находится по формуле: $F = \rho g h S$, а давление на нижнее основание

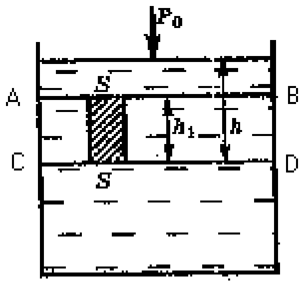

Рис. 1.16

$$P = \rho g h \qquad (1.79)$$

Если давление на поверхности P_0, то в любом горизонтальном слое давление постоянно и будет зависеть от глубины слоя АВ:

$$P = P_0 = \rho g h \qquad (1.80)$$

Согласно формуле (1.82) сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая законом Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу жидкости (газа) вытесненной телом.

$$F_A = \rho g V \qquad (1.81)$$

где ρ — плотность жидкости, V — объем погруженного в жидкость тела.

В жидкостях давление возрастает с глубиной и при этом величина плотности жидкости не меняется, т.к. силы межмолекулярного сцепления очень велики. При испарении жидкости увеличиваются расстояния между молекулами и перестают действовать межмолекулярные силы. Каждый *газ* на Земле подвергается двум влияниям. В результате молекулярного движения газ стремится к равномерному распределению молекул во всем предоставленном ему пространстве. Этому противодействует сила тяжести, которая тянет молекулы вниз.

Изменение плотности газа с высотой представляет существенное отличие аэростатики от гидростатики.

1.6.2 Стационарное течение жидкости. Уравнение неразрывности

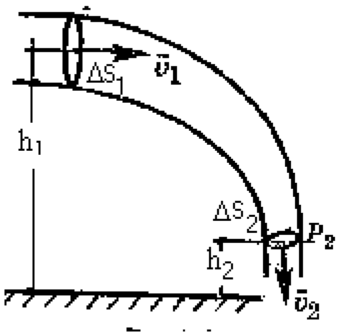

Рис. 1.17

Движение жидкостей называется *течением*, а совокупность частиц движущейся жидкости — *потоком*.

Абсолютно несжимаемая и абсолютно невязкая жидкость называется *идеальной жидкостью*.

Всю жидкость можно представить в виде поля вектора скорости. Тогда в поле вектора скорости можно провести линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частицы жидкости в этой же точке. Такие линии называются *линиями тока жидкости* (рис. 1.17). Линии тока принято проводить так, что густота их была бы больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее.

Установившееся течение жидкости называют ***стационарным течением***.

В случае стационарного течения скорость жидкости в любой точке объема остается неизменной. Линии тока при стационарном течении остаются неизменными и совпадают с траекторией отдельных частиц жидкости. Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока* (рис. 1.30).

Возьмем трубку тока и выберем два нормальных сечения ΔS_1 и ΔS_2 (рис. 1.29). Обозначим через $\vec{\upsilon}_1$ скорость течения жидкости в том месте, где проведено сечение ΔS_1, $\vec{\upsilon}_2$ — скорость в сечении ΔS_2. Тогда за единицу времени через сечение ΔS_1 пройдет объем жидкости, равный $\Delta S_1\upsilon_1$, а через сечение ΔS_2 объем $\Delta S_2\upsilon_2$. Поскольку жидкость несжимаемая, то

$$\Delta S_1\upsilon_1 = \Delta S_2\upsilon_2 \tag{1.82}$$

Это соотношение справедливо для любых двух сечений трубки тока. Следовательно

$$\Delta S\upsilon = const \tag{1.83}$$

т.е. произведение скорости течения идеальной жидкости на поперечное сечение есть величина постоянная для данной трубки тока, Уравнение (1.83) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

При стационарном течении идеальной жидкости по какой-либо трубе объем этой трубы совпадает с трубкой тока.

По теореме о неразрывности струи в тех местах, где труба шире, жидкость будет протекать медленней, а в тех местах, где труба уже, скорость течения жидкости будет больше. Другим выводом является то, что давление в широких местах больше, чем в узких.

1.6.3 Уравнение Бернулли

Выделим в текущей струе жидкости некоторую определенную массу жидкости *Δm*, которая протекает первоначально через сечение ΔS_1 а затем, через ΔS_2 (Рис.1.18). Пусть скорость течения жидкости в сечении ΔS_1 будет $\vec{\upsilon}_1$, а давление P_1. В сечении ΔS_2 скорость $\vec{\upsilon}_2$, давление P_2. Предположим, что трубка тока находится под некоторым наклоном. Высоту, на которой расположено сечение ΔS_1 обозначим h_1, а где сечение ΔS_2 – обозначим h_2.

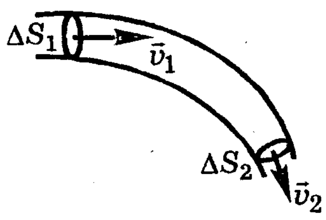

Рис. 1. 18

При протекании некоторой массы жидкости *Δm*, будет совершаться механическая работа, т.к. на эту массу жидкости действует сила, обусловленная наличием давления *P*.

Обозначим через E_1 полную энергию массы жидкости *Δm* в том месте, где она протекает через сечение ΔS_1, а через E_2 — полную энергию жидкости в сечении ΔS_2. Тогда согласно закону сохранения энергии разность энергий $(E_2 – E_1)$ будет равна работе внешних сил, перемещающих массу *Δm* от сечения ΔS_1 до сечения ΔS_2.

$$E_2 - E_1 = A. \qquad (1.84)$$

Но жидкость обладает как кинетической, так и потенциальной энергией, а это значит

$$E_1 = \frac{\Delta m \upsilon_1^2}{2} + \Delta mgh_1; \qquad E_2 = \frac{\Delta m \upsilon_2^2}{2} + \Delta mgh_2; \qquad (1.85)$$

Работа *A* совпадает с работой, совершаемой при перемещении всего участка жидкости, заключенного между сечениями ΔS_1 и ΔS_2. Считаем, что эта работа выполняется в течение времени *Δt*. За это время через сечение ΔS_2 пройдет вся масса жидкости *Δm*.

Для переноса массы жидкости *Δm* в месте расположения первого сечения жидкость должна продвинуться на отрезок $\Delta l_1 = \upsilon_1 \Delta t$, во втором сечении на отрезок $\Delta l_2 = \upsilon_2 \Delta t$. Силы, действующие на оба конца выделенного участка жидкости, соответственно равны

$$f_1 = P_1 \Delta S_1 \quad и \quad -f_2 = P_2 \Delta S_2 \qquad (1.86)$$

Сила f_2 имеет знак "минус", т.к. она направлена против направления течения жидкости, потому что представляет собой силу, действующую на рассматриваемый участок со стороны жидкости, находящейся правее сечения. Следовательно, работа A равна

$$A = f_1\Delta l_1 + f_2\Delta l_2 = P_1\Delta S_1\Delta l_1 - P_2\Delta S_2\Delta l_2 = P_1\Delta S_1\upsilon_1\Delta t - P_2\Delta S_2\upsilon_2\Delta t \quad , \qquad (1.87)$$

Подставим (1.86) и (1.87) в (1.89), в результате чего получим

$$\frac{\Delta m\upsilon_2^2}{2} + \Delta mgh_2 - \frac{\Delta m\upsilon_1^2}{2} - \Delta mgh_1 = P_1\upsilon_1\Delta S_1\Delta t - P_2\upsilon_2\Delta S_2\Delta t \qquad (1.88)$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{\Delta m\upsilon_1^2}{2} + \Delta mgh_1 + P_1\upsilon_1\Delta S_1\Delta t = \frac{\Delta m\upsilon_2^2}{2} + \Delta mgh_2 + P_2\upsilon_2\Delta S_2\Delta t \qquad (1.89)$$

Согласно закону о неразрывности струи $\Delta S_1\upsilon_1\Delta t = \Delta S_2\upsilon_2\Delta t = \Delta V$

где ΔV - объем жидкости, заключенный между сечениями ΔS_1 и ΔS_2.

Разделим правую и левую части уравнения (1.91) на $\Delta\upsilon$ и, принимая во внимание, что плотность жидкости $\rho = \Delta m/\Delta V$ имеем

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gh_1 + P_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh_2 + P_2 \qquad (1.90)$$

т.к. сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho gh + P = const \qquad (1.91)$$

Уравнение (1.13) называют *уравнением Бернулли* для наклонной трубки тока. Как видно из его вывода, уравнение Бернулли — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина P в формуле (1.93) называется *статическим давлением* (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина

$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ — *динамическим давлением*.

Величина ρgh представляет собой *гидростатическое давление*.

Если трубка тока расположена горизонтально ($h_1 = h_2$), то уравнение Бернулли имеет следующий вид:

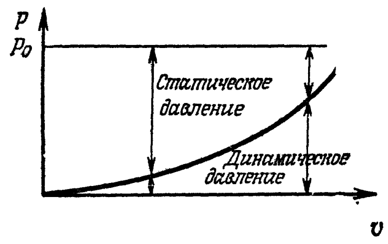

Рис. 1.19

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}+P_1=\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}+P_2 \qquad (1.92)$$

или

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2}+P=const, \qquad (1.93)$$

где $\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}+P=P_0$ – называется полным давлением.

Соотношение между динамическим и статистическим давлением в горизонтальной трубке тока можно проиллюстрировать с помощью графика зависимости давления от скорости (рис.1.19).

1.6.4 Измерение давлений

Статистическое давление это давление жидкости или газа на поверхности обтекаемого тела, поэтому статическое давление можно измерить с помощью манометра установленного перпенди кулярно потоку (рис. 1.20).

Полное давление измеряется с помощью трубки Пито, устанавливаемой

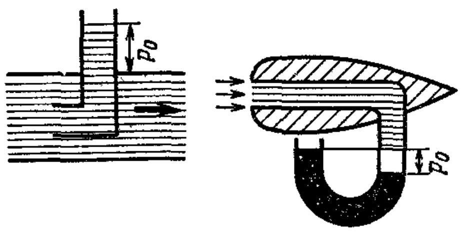

Рисунок 1.21

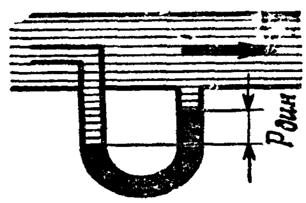

Рис. 1.22

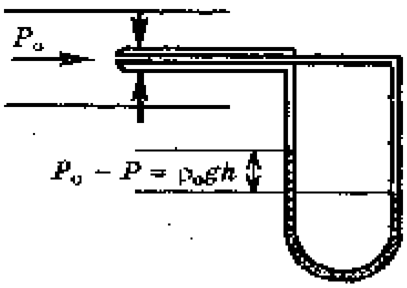

Рис. 1.22 а

вдоль потока (рис. 1. 21)

Разность полного и статистического давлений, т.е. динамическое давление, измеряется комбинацией соответствующих приборов, которая называется напорной трубкой Прандтля (рис. 1.22). Разновидностью этого прибора является трубка Пито-Прандтля, описание которой приводится в следующем параграфе (рисунок 1.22 а).

4.6.5 Следствия из уравнения Бернулли

1. Из уравнения (1.82) и теоремы о неразрывности струи видно, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей разное сечение, скорость жидкости, и следовательно динамическое давление, больше в местах сужений, а статистическое давление больше в широких местах. (рис. 1.23).

По измеренной разности давлений можно определить скорость потока:

$$\Delta P=P_1-P_2=\frac{\rho}{2}\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right), \qquad (1.94)$$

т.к. $\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2$, то $\upsilon_2 = \upsilon_1 \dfrac{S_1}{S_2}$ и, следовательно:

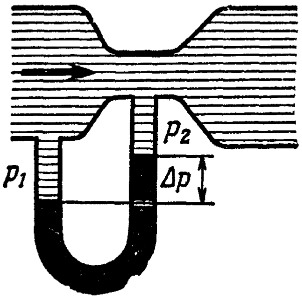

Рис. 1.23

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2\right) = \frac{\rho}{2}\upsilon_1^2\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right) \qquad (1.95)$$

2. Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости и другим способом. Для этого применяется трубка Пито-Прандтля (рис. 1.22 а). Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление (P_0), с помощью другой — статическое (P).

$$P_0 - P = \rho_0 g h \qquad (1.96)$$

где ρ_0 — плотность жидкости в манометре.

С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению

$$P_0 - P = \frac{\rho \upsilon^2}{2} \qquad (1.96)$$

Из формул (1.58) и (1.59) получаем искомую скорость потока жидкости

$$\upsilon = \sqrt{2\rho_0 g h / \rho} \qquad (1.97)$$

1.6.6 Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

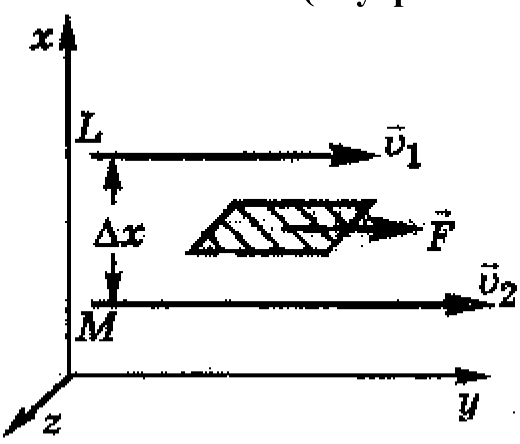

Рис. 1. 24

Вязкость (внутреннее трение) — это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

Когда слои жидкости или газа движутся относительно друг друга с разными скоростями (рис. 1.24), то частицы, переходя из одного слоя в другой, переносят и свой импульс. Следовательно, в слое *L* появляются молекулы с большими скоростями, а в слое *M* — с меньшими. Взаимодействие этих переходящих молекул с основными молекулами вызывает в слоях изменение импульса

$$m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) = m\Delta\vec{\upsilon} = \vec{F}\Delta t$$

,(1.98)

В результате инерции частиц в этих слоях появляются силы, противодействующие происходящим в них изменениям движения, а это и есть трение (внутреннее). *Сила внутреннего трения* F тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя *S* (рис. 1.38) и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою.

На рис. 1.24. представлены два слоя L и M, отстоящие друг от друга на расстояние Δx и движущиеся со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. При этом $\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \Delta\vec{\upsilon}$. Величина $|\vec{\upsilon}/\Delta x|$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении *x*, перпендикулярном направлению движения слоев и называется градиентом скорости. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$|\vec{F}| = \eta\left|\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta x}\right|S\,, \qquad (1.93)$$

где η коэффициент пропорциональности, зависящий от природы жидкости, называется динамической вязкостью (или просто вязкостью)

Единица вязкости - паскаль-секунда [Па·с].

Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18-40^{0}С падает в четыре раза. Русский физик П. Капица (1894-1984) открыл, что при температуре 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется *ламинарным* (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и *турбулентным* (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Английский ученый О. Рейнольдс (1842-1912) установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\langle v\rangle d}{\eta} = \frac{\langle v\rangle d}{\gamma}\,, \qquad (1.99)$$

где $\gamma = \eta/\rho$ - кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости;

$<\upsilon>$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

Вычисляя числа Рейнольдса для разных жидкостей и газов, нашли, что переход от ламинарного движения к турбулентному происходит при значении $Re \sim 1160$:

если $Re < 1160$ — движение ламинарное;

если $Re > 1160$ — движение турбулентное.

Для воды в водопроводных трубах $1200 < Re < 2000$.

Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

1.6.7 Методы определения вязкости. Метод Стокса.

Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести $P = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$, где ρ - плотность шарика; сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3\rho' g$, где ρ' — плотность жидкости; сила сопротивления, эмпирически установленная Стоксом $F = 6\pi\eta r\upsilon$, где r — радиус шарика, и υ - его скорость. При равномерном движении шарика.

$$P = F_A + F \qquad (1.100)$$

или

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho' g + 6\pi\eta r\upsilon \qquad (1.101)$$

откуда

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')g r^2}{9\upsilon}, \qquad (1.102)$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

1.6.8 Метод Пуазейля.

Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Объем жидкости, протекающей по капилляру радиусом R и длиной l за время t находится по формуле:

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta P t}{8\eta l}$$

Отсюда вязкость определяется по формуле:

$$\eta = \frac{\pi R^2 \Delta P t}{8 V l} \qquad (1.103)$$