

1.2.4. Классификация погрешностей измерения

Отклонение результата измерений от действительного (истинного) значения измеряемой величины называют *погрешностью измерений*. При этом следует иметь в виду, что истинное значение физической величины считается неизвестным и применяется в теоретических исследованиях. Действительное значение физической величины устанавливается экспериментальным путем в предположении, что результат эксперимента (измерения) в максимальной степени приближается к истинному значению.

Погрешности измерений приводятся обычно в технической документации на средства измерения или в нормативных документах. Но если учесть, что погрешность зависит еще и от условий, в которых проводится само измерение, от экспериментальной ошибки методики и субъективных особенностей человека в случаях, где он непосредственно участвует в измерениях, то можно говорить о нескольких составляющих погрешности измерений либо о суммарной погрешности.

При практическом использовании тех или иных измерений важно оценить их точность. Термин «точность измерений», т. е. степень приближения результатов измерения к некому действительному значению, не имеет строгого определения и используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки используется понятие «погрешность измерений». Оценка погрешности измерений – одно из важных мероприятий по обеспечению единства измерений.

Количество факторов, влияющих на точность измерений, достаточно велико, и любая классификация погрешностей измерения в известной мере условна (рис. 1.4).

Следует различать погрешность средств измерений и погрешность результата измерения этим же средством измерения. Погрешности измерений зависят от метрологических характеристик используемых средств измерений, совершенства выбранного метода измерений, внешних условий, а также от свойств объекта измерения и измеряемой величины. Погрешности измерений обычно превышают погрешности используемых средств измерений, однако, используя специальные методы устранения ряда погрешностей и статистическую обработку многократных наблюдений, можно в некоторых случаях получить погрешность измерения меньше погрешности используемых средств измерений.



Рис. 1.4. Классификация погрешностей измерения

Погрешность измерений $\Delta x_{изм}$ определяется формулой

$$\Delta x_{изм} = x - x_{\partial}, \quad (1.2)$$

где x – результат измерений; x_{∂} – действительное значение измеряемой величины.

Остановимся подробнее на классификации погрешностей.

1. В зависимости от формы выражения различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерения.

Абсолютная погрешность определяется как разность $\Delta = x - x_{\partial}$, (1.3)

относительная – как отношение $\delta = \pm \frac{\Delta}{x_0} 100\%$, (1.4)

приведенная погрешность $\gamma = \pm \frac{\Delta}{x_N} 100\%$, (1.5)

где x_N – нормирующее значение измеряемой величины, т. е. некоторое установленное значение, по отношению к которому рассчитывается погрешность. Это может быть верхний предел измерений средств измерений (если шкала односторонняя), диапазон измерений (если шкала прибора двухсторонняя). Для многих средств измерений по приведенной погрешности устанавливается класс точности прибора.

В качестве действительного значения при многократных измерениях параметра принимается среднее арифметическое значение \bar{x}

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.6)$$

Для оценки возможных отклонений величины x от x_0 определяют опытное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.7)$$

Для оценки рассеяния отдельных результатов x_i измерения относительно среднего \bar{x} определяют среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{при } n \geq 20$$

или

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{при } n < 20. \quad (1.8)$$

Формулы (1.4) и (1.5) соответствуют центральной предельной теореме теории вероятностей, согласно которой

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.9)$$

Среднее арифметическое из ряда измерений всегда имеет меньшую погрешность, чем погрешность каждого определенного измерения. Это отражает и формула (1.9), определяющая фундаментальный закон теории погрешностей. Из него следует, что если необходимо повысить точность результата (при исключении систематической погрешности) в 2 раза, то

число измерений нужно увеличить в 4 раза, если требуется увеличить точность в 3 раза, то число измерений увеличивают в 9 раз.

Нужно четко разграничивать применение $\sigma_{\bar{x}}$ и σ_x : величина $\sigma_{\bar{x}}$ используется при оценке окончательного результата, а σ_x – при оценке погрешности метода измерений.

Другая классификация – по закономерностям проявления.

2. В зависимости от характера проявления, причин возникновения и возможностей устранения различают систематическую и случайную составляющие погрешности измерений, а также грубые погрешности (промахи).

Систематическая составляющая Δ_c остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одного и того же параметра.

Случайная составляющая $\overset{o}{\Delta}$ изменяется при повторном изменении одного и того же параметра случайным образом.

Грубые погрешности (промахи) возникают из-за ошибочных действий оператора, неисправности средств измерения или резких изменений условий измерений. Как правило, грубые погрешности выявляются в результате обработки результатов измерений с помощью специальных критериев.

Случайная и систематическая составляющие погрешности проявляются одновременно, так что общая погрешность при их независимости $\Delta = \Delta_c + \overset{o}{\Delta}$ или через среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_{\Delta_c}^2 + \sigma_{\overset{o}{\Delta}}^2}$$

При многократных измерениях одной и той же величины и наличии случайных погрешностей результаты измерений также являются случайными величинами.

Они будут полностью описаны с вероятностной точки зрения, если задана *функция распределения вероятностей* $F(x)$, характеризующая вероятность P появления тех или иных значений x

$$F(x) = P[x_i \leq x]. \quad (1.10)$$

Часто для характеристики случайной величины используется производная функции распределения, называемая *плотностью распределения*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.11)$$

Случайные погрешности нельзя исключить полностью, но их влияние может быть уменьшено путем обработки результатов измерений. Для этого должны быть известны вероятностные и статистические характеристики (закон распределения, закон математического ожидания, среднеквадратическое отклонение, доверительная вероятность и доверительный интервал). Часто для предварительной оценки закона распределения параметра используют относительную величину среднеквадратического отклонения – коэффициент вариации ν_x :

$$\nu_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \quad (1.12)$$

Например, при $\nu_x \leq 0,33 \dots 0,35$ можно считать, что распределение случайной величины подчиняется нормальному закону.

Если P означает вероятность α того, что \bar{x} результата измерений отличается от действительного на величину не более чем $\overset{o}{\Delta}$, т. е.

$$P = \alpha \left\{ \bar{x} - \overset{o}{\Delta} < x_u < \bar{x} + \overset{o}{\Delta} \right\}, \quad (1.13)$$

то в этом случае P – *доверительная вероятность*, а указанный интервал – *доверительный интервал*.

Таким образом, для характеристики случайной погрешности необходимо задать два числа – величину самой погрешности (или доверительный интервал) и доверительную вероятность. При нормальном распределении случайных погрешностей 68 погрешностей из ста ($P=0,68$) по модулю меньше σ_x , 95 погрешностей ($P=0,95$) меньше $2\sigma_x$ и только три погрешности из тысячи ($P=0,997$) будут иметь значения больше $3\sigma_x$.

Доверительная вероятность по формуле (1.13) характеризует вероятность того, что отдельное значение x_i не будет отклоняться от истинного значения более чем на $\overset{o}{\Delta}$. Безусловно, важнее знать отклонение от истинного значения среднего арифметического ряда измерений.

До сих пор рассматривались оценки среднеквадратического отклонения по «необходимому» (достаточно большому) числу измерений. В этом случае σ^2 называется *генеральной дисперсией*. При малом числе измерений (менее 10-20) получают так называемую *выборочную*

дисперсию $\bar{\sigma}^2$. Причем $\bar{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$ лишь при $n \rightarrow \infty$.

При ограниченном числе измерений n вводят коэффициент Стьюдента t_p , определяемый по специальным таблицам в зависимости от числа измерений и принятой доверительной вероятности P .

Тогда средний результат измерений находится с заданной вероятностью P в интервале

$$\bar{x} \pm \frac{t_p \sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.14)$$

Для уменьшения случайной погрешности есть два пути: повышение точности измерений (уменьшение σ_x) и увеличение числа измерений n с целью использования соотношения (1.5). Считая, что все возможности совершенствования техники измерений использованы, рассмотрим второй путь. При этом следует отметить, что уменьшать случайную составляющую погрешности целесообразно лишь до тех пор, пока общая погрешность измерений не будет полностью определяться систематической составляющей Δ . Если систематическая погрешность определяется классом точности средства измерения, то необходимо, чтобы доверительный интервал $\pm \frac{t_p \sigma_x}{\sqrt{n}}$ был существенно меньше Δ_c .

Обычно принимают от $\Delta \leq \frac{\Delta_c}{2}$ до $\Delta \leq \frac{\Delta_c}{10}$ при $P=0,95$. В случае невозможности выполнить эти соотношения необходимо коренным образом изменить методику измерения. Для сравнения случайных погрешностей с различными законами распределения обязательно использование показателей, сводящих плотность распределения к одному или нескольким числам. В качестве таких чисел и выступают среднеквадратическое отклонение, доверительный интервал и доверительная вероятность.

Как правило, считают, что систематические погрешности могут быть обнаружены и исключены. Однако в реальных условиях полностью исключить систематическую составляющую погрешности невозможно. Всегда остаются какие-то неисключенные остатки, которые и нужно учитывать, чтобы оценить их границы. Это и будет систематическая погрешность измерения. В отличие от случайной погрешности, выявленной в целом вне зависимости от ее источников, систематическая погрешность рассматривается по составляющим в зависимости от источников ее возникновения, причем различают методическую,

инструментальную и субъективные составляющие погрешности.

Субъективные систематические погрешности связаны с индивидуальными особенностями оператора. Как правило, эта погрешность возникает из-за ошибки в отсчете показаний (примерно 0,1 деления шкалы) и неопытности оператора. В основном же систематические погрешности возникают из-за методической и инструментальной составляющих.

Методическая составляющая погрешности обусловлена несовершенством метода измерений, приемами использования средства измерений, некорректностью расчетных формул и округления результатов.

Инструментальная составляющая возникает из-за собственной погрешности средства измерения, определяемой классом точности, влиянием средства измерения на результат и ограниченной разрешающей способности средства измерения.

Грубые погрешности измерений (промахи) могут сильно исказить среднее значение \bar{x} , σ и доверительный интервал, поэтому их исключение из серии измерений обязательно. Обычно они сразу видны в ряду полученных результатов, но в каждом конкретном случае это необходимо доказать. Существует ряд критериев для оценки промахов.

1. Критерий 3σ . В этом случае считается, что результат, возникаемый с вероятностью $P \leq 0,003$, малореален и его можно квалифицировать промахом, т. е. сомнительный результат x_i отбрасывается, если

$$\left| \bar{x} - x_i \right| > 3\sigma, \quad (1.15)$$

где \bar{x} и σ находятся без учета сомнительного результата.

Данный критерий надежен при числе измерений $n \geq 20, \dots, 50$.

2. Критерий Романовского (при $n < 20$).

При этом вычисляют отношение

$$\left| \frac{\bar{x} - x_i}{\sigma} \right| = \beta, \quad (1.16)$$

полученное значение β сравнивается с табличным β_m (таблица 2.3) при выбранном уровне значимости P .

3. Критерий Шовене (при $n < 10$). В этом случае промахом считается

результат x_i , если разность $\left| \bar{x} - x_i \right|$ превышает значения σ , приведенные ниже в зависимости от числа измерений:

$$\left| \bar{x} - x_i \right| > \begin{cases} 1,6\sigma & n = 3 \\ 1,7\sigma & n = 6 \\ 1,9\sigma & n = 8 \\ 2,0\sigma & n = 10 \end{cases} \text{ при } \cdot \quad (1.17)$$

Все виды составляющих погрешности нужно анализировать и выявлять в отдельности, а затем суммировать их в зависимости от характера проявления, что является основной задачей при разработке и аттестации методик выполнения измерений.

При установлении модели погрешности возникают типовые статистические задачи: оценка параметров закона распределения, проверка гипотез, планирование эксперимента и др.

Точность измерений должна выражаться одним из способов:

- интервалом, в котором с установленной вероятностью P находится суммарная погрешность измерения;

- интервалом, в котором с установленной вероятностью находится систематическая составляющая погрешности измерений;

- стандартной аппроксимацией функции распределения случайной составляющей погрешности измерения и среднеквадратическим отклонением случайной составляющей погрешности измерения;

- стандартными аппроксимациями функций распределения систематической и случайной составляющих погрешности измерения и их среднеквадратическими отклонениями и функциями распределения систематической и случайной составляющих погрешности измерения.

В инженерной практике применяется в основном первый способ ($x = a \pm \Delta$ или от Δ_{\min} до Δ_{\max} , $P=0,9$). Система допусков, например, построена на понятии предельной погрешности $\Delta_n = \pm 2\sigma$ при $P=0,95$). Числовое значение результата измерения должно заканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности Δ .

Для оценки погрешности измерений необходимо установить вид модели погрешности с ее характерными свойствами, определить характеристики этой модели, оценить показатели точности измерений по характеристикам модели.

1.2.5. Способы снижения погрешностей

В ряде случаев погрешность может быть исключена за счет устранения источников погрешности до начала измерений (профилактика погрешности), в процессе измерений и при обработке результатов измерений.

Профилактика погрешности – наиболее рациональный способ ее снижения и в устранении влияния, например, температуры (термостатированием и термоизоляцией), магнитных полей (магнитными экранами), вибрации и т. п. Сюда же относятся регулировка, ремонт и поверка средств измерений. Перед измерением объект измерения должен быть изучен для корректного выбора его модели и средств измерений, проанализированы возможные источники систематических погрешностей для снижения влияния дополнительных погрешностей на результат измерения, приняты возможные меры для устранения влияния источников погрешностей.

Удалить источники значительных инструментальных погрешностей возможно при ремонте и регулировке, необходимость проведения которых выявляется при очередных и внеочередных поверках средств измерений.

Исключение погрешностей в процессе измерения – экспериментальное исключение погрешностей. При этом не применяются какие-либо специальные установки и приспособления. Как правило, это методы и приемы измерений, позволяющие исключить или существенно снизить систематические погрешности измерений. Следует отметить, что исключению погрешностей в процессе измерений поддаются, в основном, инструментальные погрешности, погрешности установки и погрешности, вызванные влиянием внешних условий.

Используются методы замещения, компенсации погрешности по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений. Характерным признаком используемых методов является необходимость проведения повторных измерений, поэтому они применимы, в основном, при определении стабильных погрешностей либо погрешностей, изменяющихся по известным законам.

Метод замещения является разновидностью метода сравнения с мерой. Суть этого метода состоит в замене измеряемой величины величиной, известной с большой точностью. Причем последняя должна находиться в тех же условиях, что и измеряемая физическая величина. Если в результате замены не происходит изменений режимов работы, то

делается вывод, что измеряемая величина равна значению меры. Это позволяет исключить остаточную погрешность мостовых цепей, ошибки градуировки шкал и т.д.

Метод компенсации погрешности по знаку предусматривает измерение с двумя наблюдениями, выполненными так, чтобы постоянная систематическая погрешность, известная по природе, но неизвестная по величине, входила в результат каждого из них с противоположными знаками. Погрешность исключается при вычислении среднего арифметического значения измеренной величины. Метод может применяться лишь в случае погрешностей, источники которых имеют направленное действие. Пользуясь этим методом, устраняют влияние на результат измерения погрешностей, вызванных влиянием постоянных магнитных полей, термо-ЭДС и т.д.

Метод противопоставления – метод, при котором измерение проводится с двумя наблюдениями, проводимыми так, чтобы возникновение постоянной погрешности оказывало разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений. Метод противопоставления фактически является разновидностью метода компенсации погрешности по знаку. Метод противопоставления применяется, в основном, для исключения погрешности при сравнении измеряемой величины с мерой примерно равного значения.

Метод симметричных наблюдений состоит в том, что несколько наблюдений выполняют через равные интервалы времени и затем вычисляют среднее арифметическое значение симметрично расположенных наблюдений. Используется для выявления и исключения прогрессивной погрешности, являющейся линейной функцией времени или другой величины.

Хорошие результаты дает использование *метода рандомизации*, состоящего в переводе систематических погрешностей в случайные. Для этого необходимо выполнить наблюдения так, чтобы погрешности наблюдений были разнообразными и похожими на случайные.

Внесение известных поправок в результат измерения – исключение погрешностей вычислением.

Поправка по величине равна систематической погрешности и противоположна ей по знаку.

$$q = -\Delta_c. \quad (1.18)$$

При учете поправки q за действительное значение измеряемой величины принимают исправленное среднее

$$x_{\partial} = \bar{x} + q. \quad (1.19)$$

Величину поправки можно определить, в частности, используя метод сличения, сравнивая показания средства измерения с показаниями образцового прибора либо со значением меры в условиях, аналогичных условиям проведения измерения.

Некоторые систематические погрешности могут быть рассчитаны, если известны характер и особенности использованных средств и методов измерений. В частности, погрешность от влияния температуры может быть рассчитана на основании известных температурных зависимостей параметров средств измерений.

1.2.6. Качество измерений

Под качеством измерений понимают совокупность свойств, обуславливающих получение результатов с требуемыми точностными характеристиками, в необходимом виде и в установленные сроки. Качество измерений характеризуется такими показателями, как точность, правильность и достоверность.

Понятие *точность измерений* характеризует степень приближения погрешности измерений к нулю, т. е. полученного при измерении значения к истинному значению измеряемой величины.

Правильность измерений определяется близостью к нулю систематической погрешности.

Достоверность измерений говорит о том, что погрешность не выходит за пределы отклонений, заданных в соответствии с поставленной целью измерений.

Эти показатели должны определяться по оценкам, к которым предъявляются требования состоятельности, несмещенности и эффективности.

Если систематическая составляющая исключена, то $x = \bar{x}$, а точность результата измерений \bar{x} характеризуется степенью рассеяния его значения, т. е. дисперсией. На рис. 1.5 заштрихованная площадь относится к плотности вероятности распределения среднего значения.

Однако из-за ограниченного числа измерений \bar{x} точно определить невозможно. Можно лишь с определенной вероятностью указать границы интервала, в котором оно находится.

Оценку среднего значения числовой характеристики закона распределения x , изображаемую точкой на числовой оси, называют точечной оценкой. Оценки являются случайными величинами, их значение зависит от числа наблюдений n .

Состоятельной называют оценку, которая сводится по вероятности к оцениваемой величине, т.е. $\bar{x} \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$.

Несмещенной является оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемой величине, т.е. $x = \bar{x}$.

Эффективной называют такую оценку, которая имеет наименьшую дисперсию $\sigma_x^2 = \min$

Перечисленным требованиям удовлетворяет среднее арифметическое \bar{x} результатов n наблюдений.

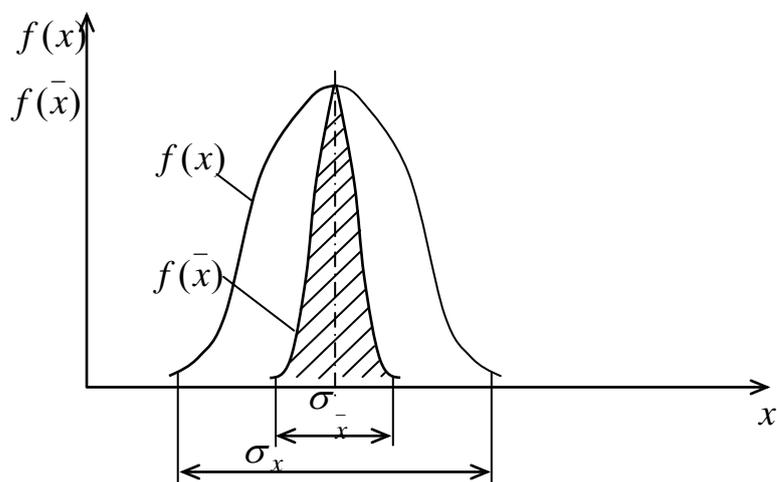


Рис. 1.5. Плотность распределения отдельного и суммарного результата измерения

Достоверность измерений зависит от степени доверия к результату и характеризуется вероятностью того, что истинное значение измеряемой величины лежит в указанных окрестностях действительного. Другими словами, достоверность измерения – это близость к нулю случайной или неисключенной систематической погрешности.

Для количественной оценки качества измерений рассмотрим влияние параметров измерений на погрешность их результатов.

При планировании измерений и оценке их результатов задаются определенной моделью погрешностей: предполагают наличие тех или иных составляющих погрешности, закон их распределения и др. В этой связи необходимо знать влияние на погрешность результатов измерений:

- числа наблюдений и доверительной вероятности, с которой должны быть известны вероятностные характеристики результатов;
- степени исправленности наблюдений, т. е. наличия неисключенной составляющей погрешности наблюдений;
- вида и формы закона распределения погрешностей.

Следует отметить, что результаты измерений, не обладающие достоверностью, т. е. степенью уверенности в их правильности, не представляют ценности.

Наряду с перечисленными показателями качество измерительных операций характеризуется также сходимостью и воспроизводимостью результатов. Эти показатели наиболее распространены при оценке качества испытаний и характеризуют точность испытаний.

Очевидно, что два испытания одного и того же объекта одинаковым методом не дают идентичных результатов. Объективной мерой их могут служить статистически обоснованные оценки ожидаемой близости двух или более числа результатов, полученных при строгом соблюдении методики испытаний.

Сходимость – это близость результатов двух испытаний, полученных одним методом, на идентичных установках, в одной лаборатории.

Воспроизводимость отличается от сходимости тем, что оба результата должны быть получены в разных лабораториях.

Обобщает все эти положения современное понятие *единство измерений* – состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах, а погрешности известны с заданной вероятностью и не выходят за установленные пределы.

Как выше отмечалось, мероприятия по реальному обеспечению единства измерений в большинстве стран мира установлены законами и входят в функции законодательной метрологии.

Итак, первым условием обеспечения единства измерений является представление результатов измерений в узаконенных единицах, которые были бы одними и теми же всюду, где проводятся измерения и используются их результаты. В России, как и в большинстве других стран, узаконенными единицами являются единицы величины Международной системы единиц. Второе условие единства измерений – погрешность измерений не превышает (с заданной вероятностью) установленных пределов. Главным нормативным актом по обеспечению единства измерений является закон РФ «Об обеспечении единства измерений».