ЛЕКЦИЯ 3. МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

3.3. Аналитические методы исследования.

В научных исследованиях очень часто используют аналитические методы, которые позволяют установить математическую зависимость между параметрами изучаемого явления или процесса в явном виде, глубоко её проанализировать и установить точные количественные связи между аргументами и функциями. Стремясь упростить исследуемую модель и получить простое решение поставленной задачи, широко применяют элементарные функции и уравнения, особенно линейные ($y = ax$, $y = a + bx$), например, прямолинейная огибающая кругов Мора. Для исследования процессов по принципу «ценного механизма» (разрушение, растворение, перемешивание и др.) используют экспоненциальные ($y = e^{-x}$), параболические ($y = x^2$) и показательные ($y = a^x$) функции. Чтобы изучить колебательные и периодические процессы применяют тригонометрические функции. Элементарные функции непрерывны, что позволяет их дифференцировать и интегрировать, а также оптимизировать путем нахождения экстремумов.

Элементарные функции непрерывны, что позволяет их дифференцировать и интегрировать, а также оптимизировать путем нахождения экстремумов. Например, производительность труда P шахтостроительной организации зависит от годового объема работы V в виде:

$$P = C_0 + C_1 V - C_2 V^2,$$

где C_0, C_1 и C_2 – постоянные. (3.1)

Анализ зависимости (3.1) показывает, что по мере увеличения объема работ производительность вначале возрастает, а затем убывает, так как в больших организациях сложно организовывать производство (рис. 4.1). Оптимальный объем работ для
можно найти, определив экстремум функции (3.1):

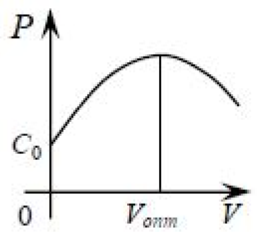


Рисунок 4.1 – графическое представление зависимости 3.1.

$$\frac{dP}{dV} = C_1 - 2V \cdot C_2 = 0; \qquad V_{опт} = \frac{C_1}{2C_2}. \qquad (3.2)$$

При анализе формы и размеров инженерных конструкций пользуются методами элементарной, начертательной и аналитической геометрий, а также векторным анализом. Для теоретического анализа функций одной переменной используют дифференциальные уравнения. Уравнения первого порядка имеют вид:

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$ – запись в неявном виде;

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$ – запись в явном виде. (3.3)

Часто применяют дифференциальные уравнения второго, третьего и более высших порядков:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ \dots \ , \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \, . \qquad (3.4)$$

Общее решение таких уравнений представляет собой семейство кривых на плоскости. Кривая $f\,(x,y)$ будет решением уравнения (3.4.), если она в каждой точке касается вектора поля направления dy/dx. Поэтому каждое такое уравнение имеет множество решений (кривых):

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – постоянные интегрирования. (3.5.)

Большое распространение при решении прикладных задач получили дифференциальные уравнения в частных производных, например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ и др.} \qquad (3.6)$$

Общее решение этих уравнений зависит уже не от произвольных постоянных, а от произвольных функций. В них искомые решения представляют собой функции нескольких независимых переменных. Суть решения задачи сводится к тому, чтобы найти соотношение между переменными, установить функциональные зависимости

$u = f\,(x,y)$ или $u = f\,(x,t)$,

удовлетворяющие дифференциальному уравнению с частными производными и частным условиям задач, которые называют краевыми условиями (начальными и граничными). Эти дополнительные условия определяются физическим смыслом задачи, они позволяют из множества решений получить одно, удовлетворяющее рассматриваемому процессу. Условия, которые характеризуют все особенности искомого решения, называются условиями ***однозначности***. Эти условия включают:

– геометрию системы (симметрия, форма и размеры тела);

– физические свойства тела (теплопроводность, водопроницаемость, упругость, пластичность, вязкость и пр.);

– начальные условия, т.е. состояние системы в начальный момент;

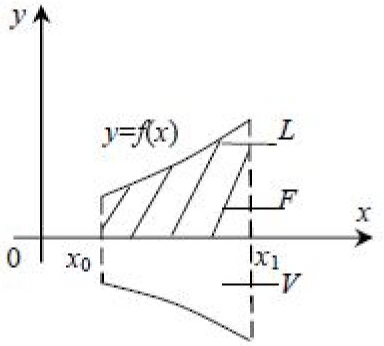
– граничные условия, т.е. взаимодействие системы на границах с окружающей средой.

Для решения линейных задач математической физики с простыми условиями, например, задачи тепломассообмена и им подобные, применяют операционные методы или методы интегрального преобразования Лапласа, Фурье, Бесселя и др. Суть операционного преобразования заключается в переводе функции $f(t)$ переменного t, называемой начальной или оригиналом, в функцию $f\,^*(p)$ другого переменного p, называемую изображением. Далее изучают не саму функцию (оригинал), а ее измененное значение (изображение).Преобразование осуществляется путем умножения начальной функции на другую и интегрирования ее. Так, преобразование Лапласа от функции $f(t)$ имеет вид

$$f^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \text{ , где } p \text{ – комплексное число.}$$

Использование функции изображения $f^*(p)$ позволяет сложные операции дифференцирования и интегрирования $f(t)$ заменить простыми алгебраическими операциями с $f^*(p)$. Выполнив эти операции, производят обратный переход к $f(t)$. При решении нелинейных задач со сложными краевыми условиями точные аналитические методы встречают значительные трудности. Многие задачи исследуются с помощью ***вариационного исчисления.*** Для этого вводят понятие функционала. Пусть имеем кривую

$y = f(x)$ с областью определения $x0 \le x \le x1$ (рис. 4.2). Длина кривой L, площадь криволинейной трапеции F, объем тела вращения V зависит от вида заданной кривой:



$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx;$$

$$F=\int_{x_0}^{x_1}y(x)\,dx;$$

$$V=\pi\int_{x_0}^{x_1}\left[y(x)\right]^2 dx.$$

Рисунок 4.1 –Схема к определению понятия функционала

Таким образом, функция $y = f(x)$ однозначно определяет значения L, F и V, т.е. играет роль своеобразного «аргумента». В этом случае величины L, F, V называют функционалами относительно функции $y = f(x)$. Суть задачи вариационного исчисления состоит в том, что, если задан функционал $F(y')$ в области $x0 \le x \le x1$, то требуется найти такую функцию $y = f(x)$, при которой этот функционал принимает экстремальные значения.

В фундаментальных исследованиях часто применяют тензорное исчисление. При этом изучаемая величина имеет определенный физический смысл и не зависит от выбора системы координат. Такие величины называются тензорами. Например, напряженное состояния пород в точке характеризуется тензором

$$\sigma_{ij}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}, & \sigma_{xy}, & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}, & \sigma_{zy}, & \sigma_{zz}\end{pmatrix}.$$

Тензорное исчисление – раздел математики, изучающий тензоры и тензорные поля средствами линейной алгебры и математического анализа. В теории упругости для определения концентраций напряжений в плоскости или пространстве, содержащей различные вырезы (выработки) широко используется теория функций комплексной переменной. В основе этой теории лежит положение о конформном преобразовании, когда изучение процессов в сложной области можно заменить более простым, отображая эту область на полуплоскость или круг. Функция комплексного переменного – функция, у которой независимая переменная Z и сама функция $\omega = f(Z)$ принимают значения из области комплексных чисел. Рассмотренные аналитические методы, как правило, позволяют успешно решать только относительно простые задачи. В то же время часто возникает необходимость использования сложных дифуравнений или систем с нелинейными начальными и граничными условиями. В этом случае прибегают к тем или иным приближенным вычислениям с помощью численных методов (конечных разностей, конечных элементов). Эти методы основаны на замене непрерывного процесса изменения функции, скачкообразным, что позволяет решать задачи на ЭВМ. Сводятся они к решению системы алгебраических уравнения с большим числом неизвестных, количество которых определяется разбивочной сеткой.

3.4. Экспериментально-аналитические методы исследований

Физические процессы можно исследовать аналитическими или экспериментальными методами. Аналитические методы позволяют изучать процессы на основе математических моделей, которые могут быть представлены в виде функций, уравнений, систем уравнений, в основном дифференциальных или интегральных. Обычно вначале создают грубую модель, которую затем, после ее исследования, уточняют. Такая модель позволяет достаточно полно изучать физическую сущность явления. Однако им свойственны существенные недостатки. Для того чтобы из всего класса найти частное решение, присущее лишь данному процессу, необходимо задать условия однозначности. Часто неправильное принятие краевых условий приводит к искажению физической сущности явления, а отыскать аналитическое выражение, наиболее реально отображающие это явление, или вообще невозможно или чрезвычайно затруднительно. Экспериментальные методы позволяют глубоко изучить процессы в пределах точности техники эксперимента, особенно те параметры, которые представляют наибольший интерес. Однако результаты конкретного эксперимента не могут быть распространены на другой процесс, даже весьма близкий по своей сути. Кроме того, из опыта трудно установить, какие из параметров оказывают решающее влияние на ход процесса, и как будет протекать процесс, если меняются одновременно различные параметры. Экспериментальные методы позволяют установить лишь частные зависимости между отдельными переменными в строго определенных интервалах. Использование этих зависимостей за пределами этих интервалов может привести к грубым ошибкам. Таким образом, и аналитические, и экспериментальные методы имеют свои преимущества и недостатки. Поэтому чрезвычайно плодотворным являются сочетание положительных сторон этих методов исследований. На этом принципе основаны методы сочетания аналитических и экспериментальных исследований, которые, в свою очередь, основываются на методах аналогии, подобия и размерностей.

Метод аналогии. Метод аналогии применяют, когда разные физические явления описываются одинаковыми дифференциальным уравнениями. Рассмотрим суть метода аналогии на примере. Тепловой поток зависит от температурного перепада (закон Фурье):

$$q_T = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

где λ – коэффициент теплопроводности. (3.7)

Массперенос или перенос вещества (газа, пара, влаги, пыли) определяется перепадом концентрации вещества *C* (закон Фика):

$$q_{\text{в}} = -\mu \frac{dC}{dx},$$

μ – коэффициент массперенoса. (3.8)

Перенос электричества по проводнику с погонным сопротивлением обусловливается перепадом напряжения (закон Ома):

$$q_{\text{э}} = -\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dx},$$

где ρ – коэффициент электропроводности. (3.9)

Три различных физических явления имеют идентичные математические выражения. Таким образом, их можно исследовать методом аналогии. При этом в зависимости от того, что принимается за оригинал и модель, могут быть различные виды моделирования. Так, если тепловой поток $q_{\text{т}}$ изучают на модели с движением жидкости, то моделирование называют гидравлическим; если его исследуют на электрической модели, моделирование называют электрическим. Идентичность математических выражений не означает, что процессы абсолютно аналогичны. Чтобы на модели изучать процесс оригинала, необходимо соблюдать критерии аналогии. На прямую сравнивать $q_т$ и $q_э$, коэффициенты теплопроводности λ и электропроводности ρ, температуру T и напряжения U нет смысла. Для устранения этой несопоставимости оба уравнения необходимо представить в безразмерных величинах. Каждую переменную $П$ следует представить в виде произведения постоянной размерности $П$п на переменную безразмерную $П_б$:

$$П= П_п \cdot П_б. \qquad (3.10)$$

Имея в виду (3.10), запишем выражения для $q_т$ и $q_э$ в следующем виде:

$$q_т = q_{тп} \cdot q_{тб}; \quad \lambda = \lambda_п \cdot \lambda_б; \quad T = T_п \cdot T_б; \quad x = x_п \cdot x_б;$$

$$q_э = q_{эп} \cdot q_{эб}; \quad \rho = \rho_п \cdot \rho_б; \quad U = U_п \cdot U_б.$$

Подставим в уравнения (3.7) и (3.9) значения преобразованных переменных, в результате чего получим:

$$\left[\frac{q_{тп} \cdot x_п}{\lambda_п \cdot T_п}\right] q_{тб} = -\lambda_б \frac{dT_б}{dx_б}; \qquad \left[\frac{\rho_п q_{эп} \cdot x_п}{U_п}\right] q_{эб} = \frac{1}{-\rho_б} \frac{dU_б}{dx_б}.$$

Оба уравнения написаны в безразмерном виде и их можно сравнивать. Уравнения будут идентичны, если

$$\left[\frac{q_{тп} \cdot x_п}{\lambda_п \cdot T_п}\right] = \left[\frac{\rho_п q_{эп} \cdot x_п}{U_п}\right]. \qquad (3.11)$$

Это равенство называют критерием аналогии. С помощью критериев устанавливают параметры модели по исходному уравнению объекта. В настоящее время широко применяется электрическое моделирование. С его помощью можно изучить различные физические процессы (колебания, фильтрацию, массперенос, теплопередачу, распределение напряжений). Это моделирование универсально, простое в эксплуатации, не требует громоздкого оборудования. При электрическом моделировании применяют аналоговые вычислительные машины (АВМ). Под которыми, как мы уже говорили, понимают определенное сочетание различных электрических элементов, в которых протекают процессы, описываемые математическими зависимостями, аналогичными с зависимостями для изучаемого объекта (оригинала). Существенным недостатком АВМ является сравнительно небольшая точность и не универсальность, так как для каждой задачи необходимо иметь свою схему, а значить и другую машину. Для решения задач используют и другие методы электрического моделирования: метод сплошных сред, электрических сеток, электромеханическая аналогия, электрогидродинамическая аналогия и др. Плоские задачи моделируют с использованием электропроводной бу-маги, объемные – электролитических ванн.

Метод размерностей. В ряде случаев встречаются процессы, которые не могут быть непосредственно описаны дифференциальными уравнениями. Зависимость между переменными величинами в таких случаях можно установить экспериментально. Для того чтобы ограничить эксперимент и отыскать связь между основными характеристиками процесса, эффективно применять метод анализа размерностей.

Анализ размерностей является методом установления зависимости между физическими параметрами изучаемого явления. Основан он на изучении размерностей этих величин. Измерение физической характеристики Q означает ее сравнение с другим параметром q той же самой природы, то есть нужно определить во сколько раз Q больше чем q. В этом случае q является единицей измерения. Единицы измерения составляют систему единиц, например, Международную систему СИ. Система включает единицы измерения, которые независимы одна от другой, их называют основными или первичными

единицами. В системе СИ таковыми являются: масса (килограмм), длина (метр), время (секунда), сила тока (ампер), температура (градус Кельвина), сила света (кандела).
Единицы измерений других величин называются производными или вторичными. Они выражаются с помощью основных единиц. Формула, которая устанавливает соотношение между основными производными единицами называется размерностью. Например, размерность скорости V является

$$[V] = L^1 \cdot T^{-1},$$

где L – условное обозначение длины, а T – времени. (3.12)
Эти символы представляют собой независимые единицы системы единиц измерения (T измеряется в секундах, минутах, часах и т.д., L метрах, сантиметрах, и т.д.). Размерность выводится с помощью уравнения, которое в случае скорости имеет следующий вид:
$V = dL / dT$,
откуда вытекает формула размерности для скорости. Анализ размерностей базируется на следующем правиле: размерность физической величины является произведением основных единиц измерения, возведенных в соответствующую степень. В механике используют, как правило, три основные единицы измерения: массу, длину и время. Таким образом, в соответствии с вышеприведенным правилом, можно записать:

$$[N] = L^l \cdot M^m \cdot T^t,$$

L, M, T – обозначения основных (длина, масса, время) единиц;

l, m, t – неизвестные показатели, которые могут быть представлены целыми или дробными числами, положительными или отрицательными.

Существуют величины, размерность которых состоит из основных единиц в степени, равной нулю. Это так называемые безразмерные величины. Например, коэффициент разрыхления породы представляет собой отношение двух объемов, откуда

$$[k_p] = V^1 / V^1 = V^{1-1} = V^0,$$

следовательно, коэффициент разрыхления есть безразмерная величина.

Если в ходе эксперимента установлено, что определяемая величина может зависеть от нескольких других величин, то в этом случае возможно составить уравнение размерностей, в котором символ изучаемой величины располагается в левой части, а произведение других величин – в правой. Символы в правой части имеют свои неизвестные показатели степени. Чтобы получить окончательно соотношение между физическими величинами, необходимо определить соответствующие показатели степени.

Например, необходимо определить время t, затраченное телом, имеющим массу m, при прямолинейном движении на пути l под действием постоянной силы f. Следовательно, время зависит от длины, массы и силы. В этом случае уравнение размерностей запишется следующим образом:

$$T = L^x \cdot M^y \cdot (L \cdot M \cdot T^{-2})^z.$$

Левая часть уравнения может быть представлена в виде $T^1 \cdot M^0 \cdot L^0$. Если физические величины изучаемого явления выбраны правильно, то размерности в левой и правой частях уравнения должны быть равны. Тогда система уравнений показателей степени запишется:

$$\begin{cases} x + z = 0; \\ y + z = 0; \\ -2z = 1. \end{cases}$$

тогда $x=y=1/2$ и $z = -1/2$.

Это значит, что время зависит от пути как $\sqrt{l}$, от массы как $\sqrt{m}$ и от силы как $1/\sqrt{f}$. Однако получить окончательное решение поставленной задачи с помощью анализа размерностей невозможно. Можно установить лишь общую форму зависимости:

$$t = k\sqrt{\frac{m \cdot l}{f}}, \qquad (3.13)$$

где k – безразмерный коэффициент пропорциональности, который определяют путем эксперимента.

Таким способом находят вид формулы и условия эксперимента. Необходимо определить лишь зависимость между двумя величинам: t и A , где $A=\sqrt{m \cdot l / f}$.

Если размерности левой и правой частей уравнения равны, это значит, что рассматриваемая формула аналитическая и расчеты могут выполняться в любой системе единиц. Напротив, если используется эмпирическая формула, необходимо знать размерности всех членов этой формулы. Используя анализ размерностей, можно ответить на вопрос: не потеряли ли мы основные параметры, влияющие на данный процесс? Иначе говоря, найденное уравнение является полным или нет? Предположим, что в предыдущем примере тело при движении нагревается и поэтому время зависит также от температуры *C*.

Тогда уравнение размерностей запишется:

$$T^1 \cdot M^0 \cdot L^0 \cdot C^0 = L^x \cdot M^y (L \cdot M \cdot T^{-2})^z \cdot C^\varepsilon .$$

Откуда легко найти, что $e = 0$, т.е. изучаемый процесс не зависит от температуры и уравнение (3.13) является полным. Наше предположение не верно.

Таким образом, анализ размерностей позволяет облегчить экспериментальные исследования;

– выбрать влияющие на изучаемое явление параметры, чтобы найти аналитическое решение задачи;

– проверить правильность аналитических формул.

Метод анализа размерностей очень часто применяется в исследованиях и в более сложных случаях, чем рассмотренный пример. Он позволяет получить функциональные зависимости в критериальном виде. Пусть известна в общем виде функция *F* для какого либо сложного процесса

$$F = f(n_1, n_2, \ldots, n_k), \qquad (3.14)$$

содержащая *k* неизвестных постоянных или переменных размерных величин. Необходимо отыскать *F* и найти ее зависимость от переменных. Значения 1 2 *n* ,..., *n* имеют определенную размерность единиц измерения. Метод размерностей предусматривает выбор из числа *k* трех основных независимых друг от друга единиц измерения. Остальные (*k*–3) величины, входящие в функциональную зависимость (3.13),выбирают так, чтобы они были представлены в функции *F* как безразмерные, т.е. в критериях подобия. Преобразования производят с помощью основных, выбранных единиц измерения. При этом функция (3.13) принимает вид:

$$\frac{F}{a^x \cdot b^y \cdot c^z} = f\left(1,1,1,\frac{A}{a^{x_1} \cdot b^{y_1} \cdot c^{z_1}},\frac{B}{a^{x_2} \cdot b^{y_2} \cdot c^{z_2}},\frac{C}{a^{x_3} \cdot b^{y_3} \cdot c^{z_3}}\right).$$

Три единицы означают, что первые три числа являются отношением *n*1, *n*2 и *n*3 к соответственно равным значениям *a*, *в*, *c*. Выражение (3.14) анализируют по размерностям величин. В результате устанавливают численные значения показателей степени $x \ldots x3$, $y \ldots y3$, $z \ldots z3$ и определяют критерии подобия.

<u>3.5. Вероятностно-статистические методы исследований</u>

Теория вероятностей изучает теоретические распределения случайных величин и их характеристики. Способами обработки и анализа случайных эмпирических событий занимается другая наука, так называемая математическая статистика. Эти две родственные науки составляют единую математическую теорию массовых случайных процессов, широко применяемую в научных исследованиях.

Элементы теории вероятностей и матстатистики. Под ***совокупностью*** понимают множество однородных событий случайной величины x, которая составляет первичный статистический материал. Совокупность может быть генеральной (большая выборка N), содержащей самые различные варианты массового явления, и выборочной (малая выборка $N1$), представляющая собой лишь часть генеральной совокупности. Вероятностью $P(x)$ события x называют отношение числа случаев $N(x)$, которые приводят к наступлению события x, к общему числу возможных случаев N:

$$P(x)=N(x)/N\ . \qquad (3.15)$$

В математической статистике аналогом вероятности является понятие частости события $y(x)$, представляющей собой отношение числа случаев $n(x)$, при которых имело место событие, к общему числу событий:

$$\overline{y}(x)=n(x)/n\ . \qquad (3.16)$$

При неограниченном возрастании числа событий частость $y(x)$ стремится к вероятности $P(x)$. Допустим, имеются какие-то статистические данные, представленные в виде ряда распределения (гистограммы) на рис. 4.2, тогда частость $\overline{y_{oi}}$ характеризует вероятность появления случайной величины в интервале i, а плавная кривая $f(x)$ носит название функции распределения.

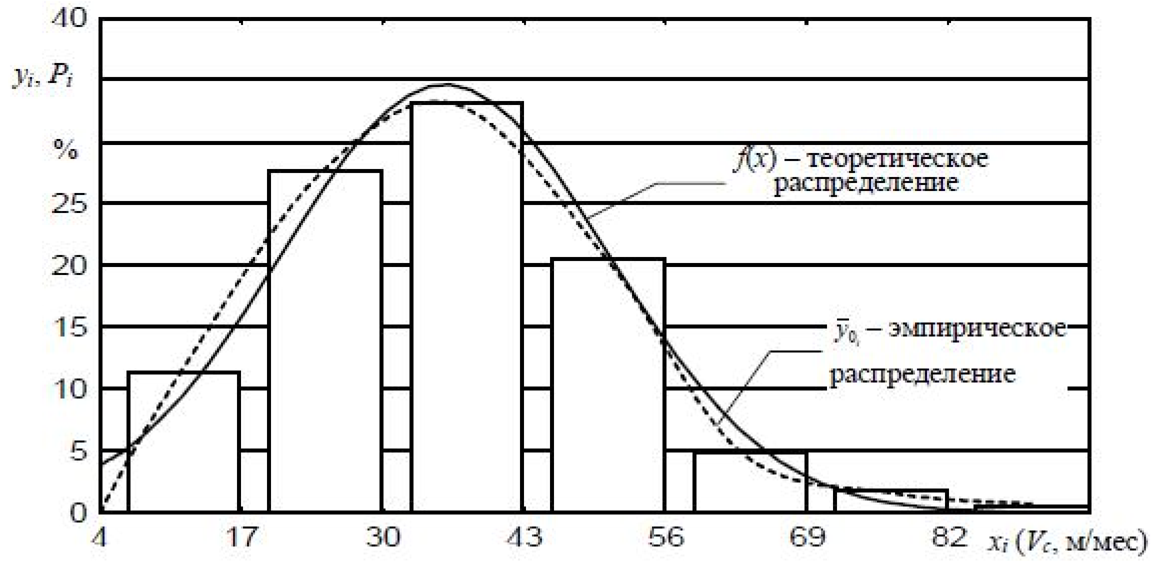


Рисунок 4.2 – Гистограмма, теоретическое и эмпирическое распределения для скорости сооружения выработок

Вероятность случайной величины – это количественная оценка возможности ее появления. Достоверное событие имеет P=1, невозможное событие – P=0. Следовательно, для случайного события $0 \le P(x) \le 1$, а сумма вероятностей всех возможных значений $\sum_{0}^{n} P_i = 1$.

В исследованиях недостаточно иметь кривую распределения $f(x)$, а необходимо знать и ее характеристики:

а) среднеарифметическое – $\bar{x} = \sum_{1}^{n} \frac{x_i}{n}$; (3.17)

б) размах – $R = x_{max} - x_{min}$, который можно использовать для ориентировочной оценки вариации событий, где x_{max} и x_{min} – экстремальные значения измеренной величины;

в) математическое ожидание – $m(x) = \sum_{1}^{n} x_i P_i$. (3.18)

Для непрерывных случайных величин математическое ожидание записывается в виде

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx, \tag{3.19}$$

т.е. равно действительному значению наблюдаемых событий x, а соответствующая матожиданию абсцисса называется центром распределения.

г) дисперсия – $Д(x) = \sum_{1}^{n} \left[x_i - m(x) \right]^2 \cdot P_i$, (3.20)

которая характеризует рассеивание случайной величины по отношению к математическому ожиданию. Дисперсию случайной величины иначе еще называют центральным моментом второго порядка.

Для непрерывной случайной величины дисперсия равна

$$Д(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m(x))^2 \cdot f(x) dx; \tag{3.21}$$

д) среднеквадратичное отклонение или стандарт –

$$\sigma(x) = \sqrt{Д(x)}. \tag{3.22}$$

е) коэффициент вариации (относительное рассеяние) –

$$k_b = \sigma(x)/m(x) < 1, \tag{3.23}$$

который характеризует интенсивность рассеяния в различных совокупностях и применяется для их сравнения. Площадь, расположенная под кривой распределения $f(x)$, соответствует единице, это означает, что кривая охватывает все значения случайных величин. Однако таких кривых, которые будут иметь площадь, равную единице, можно построить большое количество, т.е. они могут иметь различное рассеяние. Мерой рассеяния и является дисперсия или среднеквадратичное отклонение (рис. 4.3).

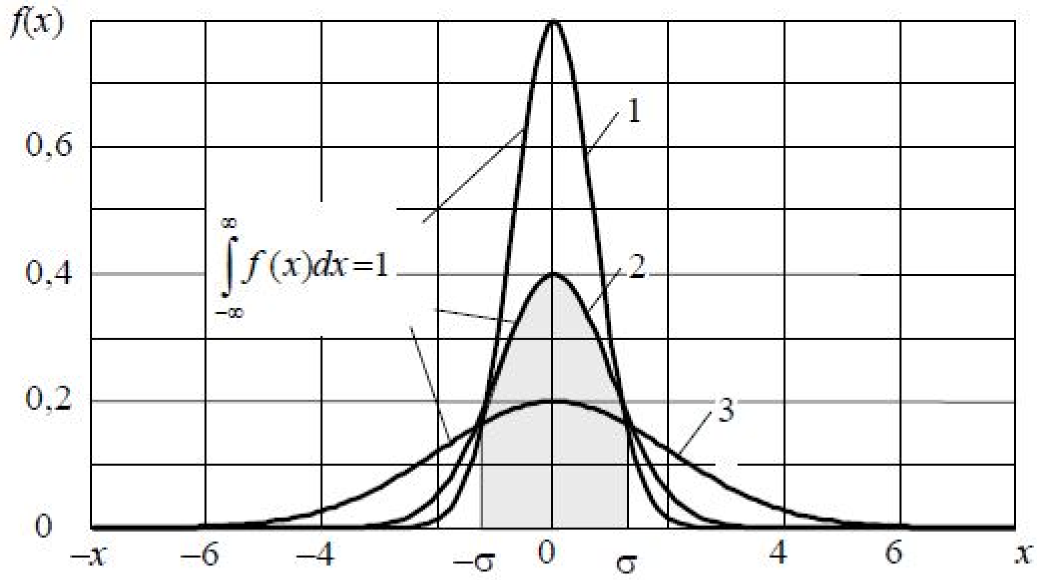


Рисунок 4.3– Характер рассеяния нормальной кривой распределения 1 – σ =0,5; 2 – σ =1,0; 3 – σ=2,0

Выше мы рассмотрели основные характеристики теоретической кривой распределения, которые анализирует теория вероятностей. В статистике оперируют эмпирическими распределениями, а основной задачей статистики является подбор теоретических кривых по имеющемуся эмпирическому закону распределения.

Пусть в результате n измерений случайной величины получен вариационный ряд $x1$, $x2$, $x3$, … xn. Обработка таких рядов сводится к следующим операциям:

– группируют xi в интервале и устанавливают для каждого из них абсолютную и относительные частости y_i и $\overline{y_{oi}}$;

– по значениям x_i и $\overline{y_{oi}}$ строят ступенчатую гистограмму (рис.4,2)

– вычисляют характеристики эмпирической кривой распределения: среднеарифметическое $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x_i$; дисперсию $Д=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$;

среднеквадратичное отклонение $\sigma=\sqrt{Д}$.

Значениям $\overline{x}$, $Д$ и σ эмпирического распределения соответствуют величины $\overline{x}$, $Д(x)$ и $\sigma(x)$ теоретического распределения.

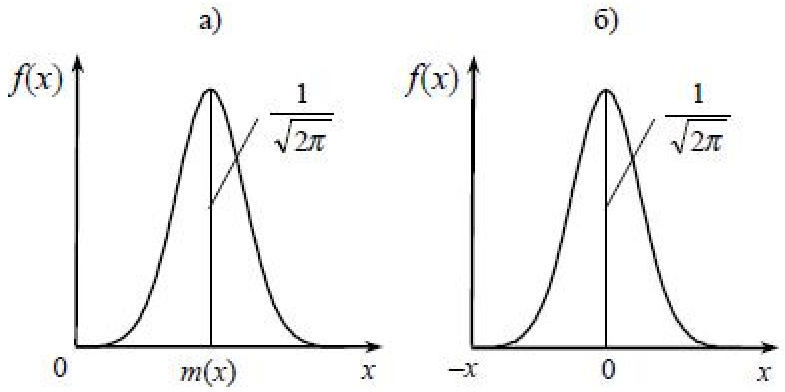


Рисунок 4.3 – Общий вид кривой нормального распределения:
а) $m(x)$. 0 ; б) $m(x) = 0$.

Рассмотрим основные теоретические кривые распределения. Наиболее часто в исследованиях применяют закон нормального распределения (рис. 4.3), уравнение которого при $m(x)$.0 имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left[-\frac{(x-m(x))^2}{2\sigma^2}\right]}. \qquad (3.24)$$

Если совместить ось координат с точкой m, т.е. принять $m(x)=0$ и принять $\sigma^2=1$, закон нормального распределения будет описываться более простым уравнением:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}. \qquad (3.25)$$

Для оценки рассеяния обычно пользуются величиной σ. Чем меньше σ, тем меньше рассеяние, т.е. наблюдения мало отличается друг от друга. С увеличением σ рассеяние возрастает, вероятность погрешностей увеличивается, а максимум кривой (ордината), равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, уменьшается. Поэтому значение $y=1/\sigma\sqrt{2\pi}$ при $\sigma=1$ называют мерой точности. Среднеквадратичные отклонения $(+\sigma)$ и $(-\sigma)$ соответствуют точкам перегиба (заштрихованная область на рис. 4.3) кривой распределения.

При анализе многих случайных дискретных процессов используют распределение Пуассона (краткосрочные события, протекающие в единицу времени). Вероятность появления чисел редких событий x =1, 2, … за данный отрезок времени выражается законом Пуассона (см. рис. 4.5):

$$f(x)=\frac{m^x}{x!}e^{-m}=\frac{(\lambda\cdot t)^x}{x!}e^{-\lambda\cdot t},$$

где x – число событий за данный отрезок времени t;

λ – плотность, т.е. среднее число событий за единицу времени;

$\lambda\cdot t=m$ – среднее число событий за время t;

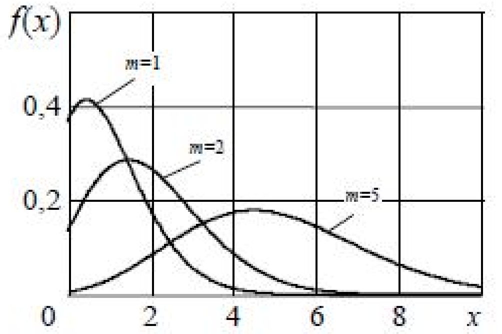


Рисунок 4.5 – Общий вид
кривой распределения Пуассона

Для закона Пуассона дисперсия равна математическому ожиданию числа наступления событий за время
t, т.е. $\sigma^2 = m$.

Для исследования количественных характеристик некоторых процессов (времени отказов машин и т.д.) применяют показательный закон распределения (рис. 4.6, плотность распределения которого выражается зависимостью
$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, где λ – интенсивность
среднее число событий в единицу времени.

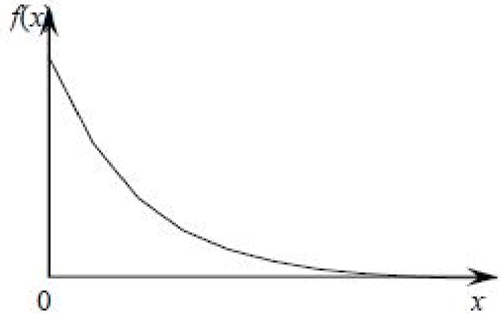


Рисунок 4.6 – Общий вид кривой
показательного закона
распределения

В показательном распределении интенсивность λ является величиной, обратной математическому ожиданию $\lambda = 1/m(x)$. Кроме того, справедливо соотношение $\sigma^2 = [m(x)]^2$.

В различных областях исследований широко применяется закон распределения Вейбулла (рис. 4.7): $f(x) = n \cdot \mu^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\mu^n \cdot x^n}$, где n, μ, - параметры закона, x – аргумент, чаще всего время.

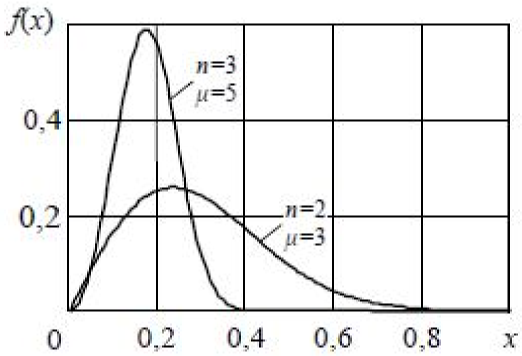


Рисунок 4.7– Общий вид кривой
распределения Вейбулла

Исследуя процессы, связанные с постепенным снижением параметров (снижением прочности материалов во времени и т.д.), применяют закон гамма-распределения (рис. 4.8): $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$, где λ, α – параметры. Если a=1, гамма функции пре вращается в показательный закон.

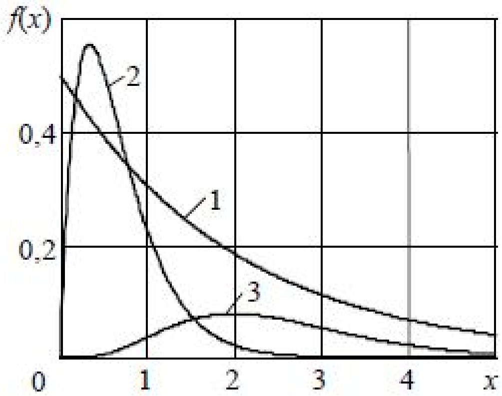


Рисунок 4.8– Общий вид кривых
гамма-распределения 1 – α=1; λ=0,5;
2– α=2; λ =3; 3– α=5; λ =2

Дисперсионный анализ. В исследованиях часто возникает вопрос: В какой мере влияет тот или иной случайный фактор на исследуемый процесс? Методы установления основных факторов и их влияние на исследуемый процесс рассматриваются в специальном разделе теории вероятностей и математической статистике – дисперсионном анализе. Различают одно – и многофакторный анализ. Дисперсионный анализ основывается на использовании нормального закона распределения и на гипотезе, что центры нормальных распределений случайных величин равны. Следовательно, все измерения можно рассматривать как выборку из одной и той же нормальной совокупности.

Теория надежности: Методы теории вероятностей и математической статистики часто применяют в теории надежности, которая широко используется в различных отраслях науки и техники. Под надежностью понимают свойство объекта выполнять заданные функции (сохранять установленные эксплуатационные показатели) в течение требуемого периода времени. В теории надежности отказа рассматриваются как случайные события. Для количественного описания отказов применяют математические модели – функции распределения интервалов времени (нормальное и экспоненциальное распределение, Вейбулла, гамма-распределения). Задача состоит в нахождении вероятностей различных показателей.

Метод Монте-Карло. Для исследования сложных процессов вероятностного характера применяют метод Монте-Карло.С помощью этого метода решают задачи по нахождению наилучшего решения из
множества рассматриваемых вариантов. Метод Монте-Карло иначе еще называют методом статистического моделирования. Это численный метод, он основан на использовании случайных чисел, моделирующих вероятностные процессы. Математической основой метода является закон больших чисел, который формулируется следующим образом: *при большом числе статистических испытаний вероятность того, что среднеарифметическое значение случайной величины стремится к ее математическому ожиданию*, равна 1:

$$\lim P\left\{\left|\frac{\sum x}{n} - m(x)\right| < \varepsilon\right\} \to 1,$$

где ε – любое малое положительное число.

ЛЕКЦИЯ 4. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4.1 Методология экспериментальных исследований

Экспериментальные исследования – это один из основных способов получения научных данных. В их основе лежит эксперимент, который представляет собой научно поставленный опыт в условиях, позволяющих следить за его ходом, управлять им и воссоздать при необходимости. От пассивного наблюдения эксперимент отличается активным воздействием исследователя на изучаемое явление. Цель эксперимента – проверка теоретических предположений, а также более широкое и глубокое изучение предмета исследования. Различают эксперименты в естественных и искусственных условиях. Естественный эксперимент проводят в открытых системах при сложном влиянии внешних факторов (социальный, производственный и т.д.). Искусственный эксперимент широко применяется в технических науках, с его помощью изучают изолированное явление в специальных условиях с целью его оценки в количественном или качественном отношении.

Экспериментальные исследования делятся на ***лабораторные и производственные.*** Лабораторные опыты проводят с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов. Они позволяют получить научную информацию с минимальными затратами, но не всегда полностью моделируют реальное явление или процесс. Поэтому часто возникает потребность в производственных экспериментальных исследованиях. Они имеют целью изучить процесс в реальных условиях с учетом воздействия различных случайных факторов. К производственным исследованиям относят также специальные полевые экспедиции по обследованию эксплуатируемых объектов. Одной из разновидностей производственного эксперимента является собирание материалов в организациях, которые накапливают их по стандартным формам. Такие данные подвергаются обработке методами математической статистики (анкетирование). Производственный эксперимент может проводиться в виде опытов на специальных полигонах. Зачастую на эксперимент затрачивается много средств и времени, проводится большое количество наблюдений и измерений, получают множество графиков, на обработку и анализ затрачивается много труда. Иногда оказывается, что сделано много лишнего, а иногда, что экспериментатор не четко организовал эксперимент, не правильно выбрал цель, а на её основе сформулировал задачи исследований. Поэтому прежде чем