

Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі

Д. СЕРІКБАЕВ АТЫНДАҒЫ ШЫҒЫС ҚАЗАҚСТАН ТЕХНИКАЛЫҚ  
УНИВЕРСИТЕТІ

**Л.Б. Баятанова, А.А. Жаксылыкова**

## **МАТЕМАТИКАЛЫҚ МАЯТНИК**

№3.01 зертханалық жұмысына арналған әдістемелік нұсқау

Өскемен

2020

**УДК 530**

Баятанова Л.Б. Математикалық маятник. №3.01 зертханалық жұмысына арналған әдістемелік нұсқау / Л.Б. Баятанова, А.А. Жаксылыкова / ШҚТУ.- Өскемен, 2020.- 12 б.

Техникалық университеттер үшін физика курсының бағдарламасына сәйкес гармониялық тербелістердің қысқаша теориясы келтірілген. Математикалық маятниктің тербеліс заңдарын зерттеу әдістемесі, зертханалық қондырғының сипаттамасы, жұмысты орындау мен тәжірибе нәтижелерін өңдеу реті берілген.

Базалық инженерлік дайындық факультетінің әдістемелік кеңесімен бекітілген  
Хаттама № \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ 2020 ж.

## МАЗМҰНЫ

	бет
1. Жұмыстың мақсаты	4
2. Шартты белгілер	4
3. Теориялық мағлұматтар	4
4. Құрал – жабдықтар	7
5. Қондырғы сипаттамасы мен өлшеу әдістемесі	7
6. Жұмысты орындау мен тәжірибе нәтижелерін өңдеу реті	9
7. Бақылау сұрақтары	11
8. Әдебиет	12

### №3.01 ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МАЯТНИК

1. Жұмыстың мақсаты: математикалық маятниктің тербеліс заңдарын зерттеу және еркін түсу үдеуін анықтау.

2. Шартты белгілер:

$\psi(t)$  - жүйенің тепе – теңдік қалыптан ауытқуын сипаттайтын параметр;

$A$  - тербеліс амплитудасы, м;

$(\omega \cdot t + \varphi_0)$  - тербеліс фазасы, рад;

$\varphi_0$  - тербелістің бастапқы фазасы, рад;

$\omega$  - циклдік жиілік, рад/с;

$g$  - еркін түсу үдеуі, м/с<sup>2</sup>

$\ell$  - математикалық маятник ұзындығы, м;

$T$  - тербеліс периоды, с;

$n$  - тербеліс саны.

## 3 ТЕОРИЯЛЫҚ МАҒЛҰМАТТАР

### 3.1 Негізгі ұғымдар

Тербелмелі қозғалыс деп уақыт бойында қайталанғыштығымен ерекшеленетін процесті айтады. Егер жүйенің күйін сипаттайтын параметрлер белгілі бір уақыт аралығында қайталанатын болса, тербеліс периодты деп аталады.

$$\psi(t) = \psi(t + T), \quad (1)$$

мұндағы  $T$  - тербеліс периоды, яғни жүйенің күйі қайталанатын ең аз уақыт аралығы, немесе толық бір тербеліс уақыты;  $\psi(t)$  - жүйе күйін сипаттайтын уақыттың периодтық функциясы.

Периодты тербелістердің ең маңызды түрлерінің бірі гармониялық тербелістер болып табылады. Бұл синус немесе косинус заңдары бойынша орындалатын тербелістер:

$$\psi(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (2)$$

Гармониялық тербелістер серпімді немесе квазисерпімді күштердің әсерінен жүзеге асады. Серпімді күштер деп ығысуға пропорционал және тепе – теңдік қалпына бағытталған, яғни Гук заңына бағынатын күштерді айтады:

$$F(x) = -kx, \quad (3)$$

мұндағы  $k$  - серпімділік коэффициенті. Квазисерпімді күштер өзінің табиғаты бойынша серпімді емес, бірақ серпімді күштер сияқты әсер ететін күштер болып табылады.

Сыртқы әсер етудің сипатына байланысты тербелістердің еркін және еріксіз түрі болады. Еркін тербеліс деп қысқа әсер етудің салдарынан тепе – теңдік қалыптан шығып, қайтадан өз-өзіне келетін жүйеде пайда болатын тербелісті айтады. Егер мұндай жүйенің тербелісі шарт бойынша серпімді және квазисерпімді болып табылатын тек қана ішкі күштердің әсерінен жүзеге асатын болса, онда мұндай еркін тербелістер меншікті деп аталады. Нақты шарттарда еркін тербелістер өшу сипатына ие, себебі олар әртүрлі кедергі күштерінің әсерінен жүзеге асады.

Еркіндік дәрежесі біреу ғана еркін тербеліс жасайтын жүйені сызықты гармониялық осцилятор деп аталады. Сызықты осциляторлар тепе – тең қалыптан аз ғана ауытқуда ғана гармониялық тербелістер жасайды. Осылайша, гармониялық осцилятор – еркіндік дәрежесі бірге тең нақты тербелмелі жүйенің идеал үлгісі. Гармониялық осциляторға түрлі маятниктер, тербелмелі контур бола алады.

### 3.2 ГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕРБЕЛІС ПАРАМЕТРЛЕРІ

Гармониялық тербеліс келесі теңдеумен берілісін

$$\psi(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (4)$$

мұндағы  $A$  – тербеліс амплитудасы, жүйенің тепе - тең қалыптан ең үлкен ауытқуы ( $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$  болғанда  $\psi(t) = A$ );

$\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$  - тербеліс фазасы, гармониялық осцилятордың берілген уақыт мезетіндегі күйін нақты сипаттайтын физикалық шама.;

$\varphi_0$  – тербелістің бастапқы фазасы ( $t=0$  болғанда  $\varphi = \varphi_0$ );

$\omega$  - меншікті гармониялық тербелістің циклдік жиілігі;

$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}$ , яғни, циклдік жиілік тербеліс фазасының өзгеру жылдамдығы

болып табылады;

$\nu_0 = \frac{n}{t}$  - тербелістің сызықтық жиілігі; ол уақыт бірлігіндегі тербелістер

санын анықтайды:  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ .

$T$  – тербеліс периоды, толық бір тербеліс уақытын анықтайды

$$T = \frac{t}{n} = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad (5)$$

$\Delta\varphi$  - фазалар айырмасы немесе фаза бойынша ығысу. Егер  $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  болса, онда тербеліс бірдей фазада жүзеге асады,  $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  - кері фазада.

$A$  және  $\varphi_0$  мәндері бастапқы шарттардан анықталады.

(4) теңдеуімен берілген гармониялық тербелістің жылдамдығын анықтаймыз, бұл жерде  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$  белгіленуін ескерсек, онда:

$$v = \dot{\psi} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}). \quad (6)$$

Гармониялық тербелістің үдеуін анықтаймыз:

$$a = \ddot{\psi} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \quad (7)$$

мұндағы  $\ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2}$ .

### 3.3 ГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕРБЕЛІСТІҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕҢДЕУІ

Гармониялық тербеліс үдеуінің формуласын (7) келесі түрде жазуға болады:

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \psi,$$

онда

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi = 0 \quad (8)$$

(8) теңдеуі гармониялық тербелістің дифференциал теңдеуі болып табылады. Бұл теңдеудің шешімі төмендегі өрнек болып табылады:

$$\psi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

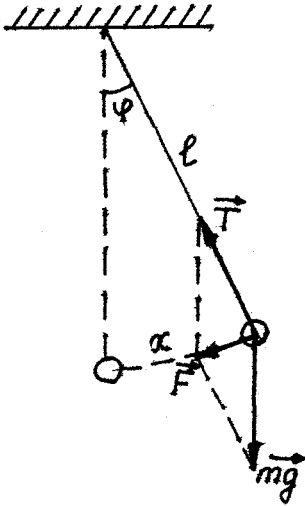
Егер қандай да бір процесс өзінің табиғатына тәуелсіз (8) дифференциал теңдеуімен сипатталса, онда бұл процесс гармониялық тербелмелі қозғалыс болып табылады.

### 3.4 МАТЕМАТИКАЛЫҚ МАЯТНИК

Математикалық маятник деп салмақсыз созылмайтын жіпке ілінген ауыр материялық нүктені айтады. Анықтамадан математикалық маятник ретінде өзі ілініп тұрған жіптің ұзындығымен салыстырғанда өлшемдерін ескермеуге болатын кез келген денені алуға болатыны көрініп тұр.

Массасы  $m$  кішкене шар ұзындығы  $\ell$  салмақсыз созылмайтын жіпке ілінген (1 - сурет). Егер шарды  $\varphi$  бұрышқа ауытқытып, тепе – тең қалыптан шығарса, онда ол тербелмелі қозғалыс жасайды. Аз ауытқуларда тербеліс гармониялық сипатқа ие болатынын көрсетейік.

$\varphi$  бұрышының аз мәнінде  $\sin \varphi \approx \frac{x}{\ell}$ , мұндағы  $x$  – тепе – тең қалыптан ығысу. Үдеу  $a = \ddot{x}$  екенін ескеріп, (9) және (10) теңдеулерінен алатынымыз:



1 - сурет

$$m\ddot{x} = -m\bar{g}\frac{x}{\ell} \quad \text{және} \quad \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0. \quad (11)$$

(11) теңдеуі гармониялық тербелістің (8) дифференциал теңдеуіне сәйкес келеді. (11) теңдеуінің шешімі келесі:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (12)$$

(11) және (8) теңдеулерін салыстырғанда алатынымыз:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (13)$$

(13) өрнегі – математикалық маятник тербелісінің меншікті жиілігі.

Математикалық маятник тербелісінің периоды

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (14)$$

Осылайша, математикалық маятник тербелісі жіптің  $\ell$  ұзындығына тәуелді де, тербелістің амплитудасына мен массасына тәуелді емес.

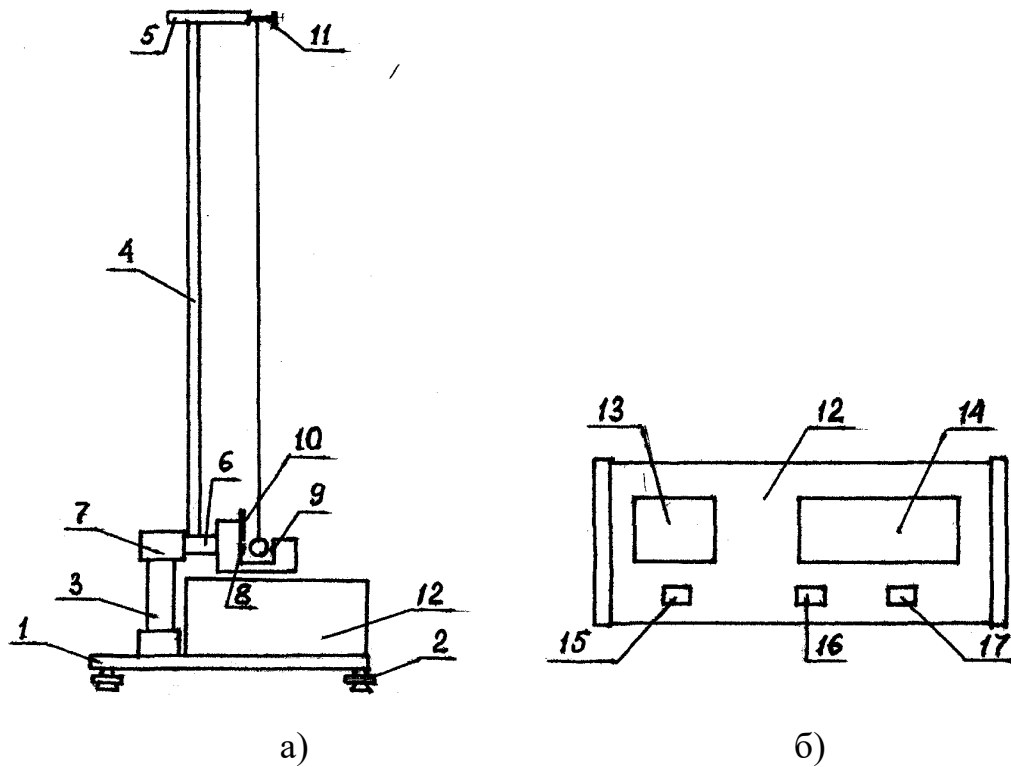
#### 4 ҚҰРАЛ – ЖАБДЫҚТАР

ФРМ – 07 қондырғысы, массалары әртүрлі шарлар жиынтығы, өлшеуіш сызғыш.

#### 5 ҚОНДЫРҒЫ МЕН ӨЛШЕУ ӘДІСТЕРІНІҢ СИПАТТАМАСЫ

Берілген жұмысты орындауға арналған қондырғының жалпы түрі 2 – суретте көрсетілген. 1 негізі құралды түзулетіп қоюға арналған 2 реттегіш аяқшалармен жабдықталған. Негізге 3 бағанасы 5 жоғарғы және 6 төменгі кронштейндары бар 4 негіз бекітілген. Төменгі кронштейннің бір жағына маятниктің тербеліс жазықтығының көлбеу бұрышын өзгертуге мүмкіндік беретін градустық құрылғысы бар 7 қондырғысы, екінші жағына фотоэлектрлік датчик бекітілген. Датчик құрамында 8 қабылдағыш фототранзистор мен 9 жарықтандырғыш шам кіреді. Фототранзистордың жоғарғы жағына маятник тербелісінің амплитудасын өлшеуге арналған 10 шкала бекітілген. Маятниктің ұзындығын 11 винтке орау арқылы реттеуге болады. Фотоэлектрлік датчик негізге бекітілген 12 есептеуіш қондырғыға жалғанған. Датчикті қосуға арналған ұяшық есептеуіш қондырғысының артқы тақташасында орналасқан. Есептеуіш қондырғының сызбалық нұсқасы 2 (б) – суретінде көрсетілген.

Құралға кезекті қызмет көрсетуге арналған элементтер есептеуіш қондырғының алдыңғы тақтасында орналасқан: 13 – период есептеуішінің терезесі (тербелістер саны); 14 – уақыт есептеуішінің терезесі; 15, 16, 17 – басқару пернелері.



2 – сурет.

15 – «қосу» пернесі. Бұл пернені басқанда қоректендіру кернеуі қосылады. Оны 13 және 14 терезелерінде 0 санын көрсетіп тұрған сандық индикаторлар арқылы, сондай – ақ фотоэлектрлік датчиктің жануы арқылы көруге болады.

16 – нөлді өлшеуіш қондырғы («сброс»). Бұл пернені басқанда құрал көрсеткіштері нөлге айналады да, құралдың өлшеуге дайындығын көрсетеді.

17 – «стоп» пернесі. Бұл пернені басу процестің аяқталғандығын білдіреді.

Құралдың электрондық сызбасы жарық ағынының фототранзисторға түсуі кезінде есептеуіш қондырғыға түсетін импульстар (не формируются) есептелмейтіндей жұмыс істейді. Маятниктің қозғалысы кезінде жарық ағыны үзіледі, соның салдарынан фототранзистор тізбегінде фотодатчиктің электрондық сызбасындағы күшейтуден кейін есептеуіш қондырғының кірісіне (вход) берілетін электрлік импульстар өндіріледі. Бір периодтың ішінде маятник екі рет жарық ағынын үзеді. Бұл есептеуіш қондырғы белгілейтін бір импульстің өндірілуін тудырады. Осылайша, есептеуіш қондырғы периодтар санын есептейді.

Маятник тербелісінің  $n$  саны (периодтар саны) мен  $t$  тербелу уақытын өлшей отырып, маятник тербелісінің периодын келесі формуламен анықтаймыз

$$T = t/n \quad (15)$$



Еркін түсу үдеуін тәжірибе жүзінде маятник тебелісінің периоды мен оның ұзындығын анықтап алып, (14) формуласын пайдаланып есептеуге болады. Маятник ұзындығының нақты мәнін анықтау қиын болғандықтан, өлшеуді маятниктің екі әртүрлі  $l_1$  және  $l_2$  ұзындықтарымен жүргізеді. Есептеуіш қондырғысының көрсеткіш нәтижесі бойынша (15) формуласының көмегімен  $T_1$  және  $T_2$  мәндерін анықтайды. Егер (14) формуласын  $T_1$  және  $T_2$  үшін жазып, алынған екі формуланы квадраттап,  $T_2^2$  - тан  $T_1^2$  - ты азайтсақ, онда еркін түсу үдеуіне арналған формуланы аламыз:

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2} \quad (16)$$

## 6 ЖҰМЫСТЫҢ ОРЫНДАЛУ РЕТІ МЕН ӨЛШЕУ НӘТИЖЕЛЕРІН ӨҢДЕУ

6.1. 1 – кестеге қолданылатын құралдарға қатысты техникалық мәліметтер енгіземіз.

1 - кесте. Қолданылатын құралдардың техникалық мәліметтері

Құрал	Құрал тегі	Өлшеу диапазондары	Бөлік құны	Дәлдік класы	Құрал қателігі
Импульс есептеуіш					
Уақыт есептеуіш					
Өлшеуіш сызғыш					

## 6.2 МАТЕМАТИКАЛЫҚ МАЯТНИК ТЕРБЕЛІСІ ПЕРИОДЫНЫҢ ТЕРБЕЛІС АМПЛИТУДАСЫНА ТӘУЕЛДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ

6.2.1. Математикалық маятник ұзындығының мүмкін болатын максимал мәнін орнату. Шарик диаметрінің горизонталь және вертикаль сызықтары фотоэлектрлік датчиктің корпусындағы **насечек** - сәйкес сызықтардың жалғасы болатынына көңіл аудару.

6.2.2. «Қосу» пернесіне басып құралды іске қосу. Өлшегіш индикаторларының барлығы нөл санын көрсетіп тұрғанына және фотоэлектрлік

датчиктің шамы жанып тұрғанына көз жеткізу. Бұл жағдайда құрал жұмысқа дайын.

6.2.3. Маятникті тепе – теңдік қалпынан екі бөлікке ауытқытып, маятникті бір мезетте «сброс» пернесін басып тұрып жібереміз.

6.2.4. Өлшегішпен  $n$  тербелісін санағаннан кейін ( $n$  тербеліс санын оқытушы береді) «стоп» пернесін басады. Тербеліс саны мен уақыт есептеуішінің көрсеткіштерін 2 – кестеге енгізеді.

Ескерту: құрал  $n$  тербеліс санын белгілеп алуы үшін пернені период өлшегіш терезесінде  $n-1$  саны шыққан кезде басу керек.

6.2.5. 6.2.3. және 6.2.4. пунктерін 4, 6, 8, 10 шкала бөліктерінің амплитудалары үшін қайталау.

6.2.6. (15) формула бойынша әртүрлі амплитудаларда маятник тербелісінің периодын анықтау.

Маятник тербелісінің периодының амплитудаға тәуелділігі сипаты жайлы қорытынды жасау. Периодтың амплитудаға тәуелді болмайтын аз амплитудалар аумағын таңдау қажет. Келесі тәжірибелерді осы аумақта жататын тербелістермен жасау.

2 – кесте. Маятник тербелісі периодының амплитудаға тәуелділігін зерттеу нәтижелері

A, бөлік	2	4	6	8	10
$n$					
$t, c$					
$T, c$					

### 6.3 МАТЕМАТИКАЛЫҚ МАЯТНИК ТЕРБЕЛІСІ ПЕРИОДЫНЫҢ ОНЫҢ МАССАСЫНА ТӘУЕЛДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ

6.3.1 Массалары әртүрлі 3 маятник алып, маятниктің ұзындығын өзгертпей тәжірибені 6.2.3, 6.2.4 пунктеріне сәйкес қайталаңыздар. Өлшеу нәтижелерін 3 – кестеге енгізіңіздер.

3 – кесте. Маятник тербелісі периодының оның массасына тәуелділігін зерттеу нәтижелері

№	$m, кг$	$n$	$t, c$	$T, c$
1				
2				
3				

## 6.4 ЕРКІН ТҮСУ УДЕУІН АНЫҚТАУ

6.4.1 Ұзындықтары  $l_1$  және  $l_2$  маятниктер үшін (өлшеу қателігін азайту үшін  $(l_1 - l_2)$  айырмасын  $0,25 l_1$  - тен кем етпей алу) 6.2.3, 6.2.4, 6.2.6 пункттеріне сәйкес  $T_1$  және  $T_2$  тербеліс периодтарын анықтау. Әр ұзындық үшін өлшеуді үш реттен қайталау қажет. Өлшеу нәтижелерін 4 – кестеге енгізіңіздер.

6.4.2 (16) формуласы бойынша  $T_1$  және  $T_2$  мәндерінің орнына  $n = const$  үшін  $t_1$  және  $t_2$  болғандағы үш өлшеудің нәтижелері бойынша есептелінген  $\langle T_1 \rangle$  және  $\langle T_2 \rangle$  мәндерін алып еркін түсу үдеуін анықтау.

4 – кесте. Маятниктің әртүрлі ұзындығында тербеліс периодын анықтау нәтижелері

№	$l_1, \text{ м}$	$t_1, \text{ с}$	$n$	$\langle T_1 \rangle, \text{ с}$	$l_2, \text{ м}$	$t_2, \text{ с}$	$n$	$\langle T_2 \rangle, \text{ с}$
1								
2								
3								
Ср.								

6.4.3 Тікелей өлшеу үшін  $l_1, l_2, t_1, t_2$  сенімділік интервалдарының шектерін анықтау (1.1 зерт. ханалық жұмысты қараңыз). Еркін түсу үдеуі үшін абсолют қателікті келесі формуламен анықтаңыздар:

$$\Delta g = \frac{\varepsilon \langle g \rangle}{100\%}, \quad (17)$$

мұндағы  $\varepsilon$  - еркін түсу үдеуі үшін салыстырмалы қателік жанама өлшеудің салыстырмалы қателігі сияқты төмендегі формуламен есептелінеді:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2(l_1 \Delta l_1 + l_2 \Delta l_2)}{(l_1 - l_2)^2} + \frac{4(T_1^2 \Delta t_1^2 + T_2^2 \Delta t_2^2)}{n^2(T_1^2 - T_2^2)}} \cdot 100\%. \quad (18)$$

6.4.4 Нәтижені келесі түрде жазыңыздар:

$$g = \langle g \rangle \pm \Delta g \quad (19)$$

6.4.5 Алынған нәтижелерді талдап қорытынды жасау.

6.4.6 Есепті /8.4/ - /8.6/ МЖБСТ талаптарына сай орындау.

## 7 БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ

7.1 Тербеліс деген не?

7.2 Қандай тербелістер еркін, меншікті деп аталады?

7.3 Гармониялық тербелістер. Гармониялық тербелістер теңдеуі. Тербелмелі жүйе параметрлері.

7.4 Серпімді және квазисерпімді күштер.

7.5 Гармониялық тербелістердің дифференциал теңдеуінің жалпы түрін және математикалық маятник үшін жазу.

7.6 Математикалық маятник деген не?

7.7 Математикалық маятник тербелісінің периоды мен жиілігі.

7.8 Математикалық маятниктің көмегімен еркін түсу үдеуін қалай анықтауға болады?

7.9 (16) және (18) формулаларын қорыту.

## 8 ӘДЕБИЕТ

8.1 Савельев И.В. Жалпы физика курсы. – М.: Наука, 1977. – т1, §§ 49, 50, 53.

8.2 Детлаф А.А., Яворский Б.М. Физика курсы. – М.: Высшая школа, 1989, §§27.1, 27.2.

8.3 Трофимова Т.И. Физика курсы. – М.: Высшая школа, 1985, §§140-142.

8.4 Кузнецов В. П. Жалпы физиканың зертханалық практикумы бойынша әдістемелік нұсқау (зерттеу нәтижелерін өңдеу).- Алма - Ата, Минвуз Каз.ССР. 1983.

8.5 ГОСТ 2.105-95 ЕСКД. Мәтіндік құжаттарға арналған жалпы талаптар.

8.6 ГОСТ 2.106-96 ЕСКД. Мәтіндік құжаттар.