Теория ошибок
и обработка результатов эксперимента

Содержание

1. Классификация и типы ошибок

1) Абсолютные – относительные.

Измеряемая величина x имеет ошибку Δx; это абсолютная ошибка, она имеет размерность величины x. Относительная ошибка вводится для оценки *качества* измерения; она, очевидно, безразмерна: $\frac{\Delta x}{x}$.

2) Систематические – случайные.

Систематические – это те, что повторяются из опыта в опыт и имеют одно и тоже значение. Из них можно выделить: поправки (уточняющие теорию, постоянные воздействия и т.п.), неизвестного происхождения (недостаточно разработанная теория, сложный эксперимент) и, наконец, класс точности приборов. Чаще всего класс точности приборов считается основным источником систематических ошибок. В электроизмерительных приборах обычно имеются классы от 0.05 до 4. Для класса 0.5 при общей шкале 100 делений показания прибора даются не точнее, чем 0.5% от всей шкалы, т.е. 0.5 деления. Максимальные погрешности, даваемые другими измерительными приборами, иногда наносятся на сами приборы (например, многие линейки имеют надпись 0.1 мм). Это цена деления. Надо иметь в виду, что в реальности экспериментатор сможет сделать замер линейкой с точностью, не лучше 0.25 мм.

На хороших электроизмерительных приборах цена деления шкалы согласована с классом данного прибора.

Случайные ошибки берут свое происхождение из множества одновременно действующих источников помех. Они проявляются лишь при многократных измерениях. Это ошибки, которые поддаются обработке с помощью математической статистики, более точно, теории вероятностей. Их непредсказуемость, таким образом, сводится к минимуму. О них будет подробно сказано ниже.

Важный тип случайных – систематических ошибок — промахи, т.е. грубые ошибки, возникшие в ходе эксперимента. Их надо уметь отделить от нормальных измерений, основной способ их устранения — это внимание и тщательность.

2. Прямые и косвенные измерения

Если величина x измеряется непосредственно прибором, то это прямое измерение; ошибки прямого измерения описаны выше. В современной науке многие понятия введены в результате развития теории, и их непосредственно померить нельзя. Они вычисляются по теоретическим формулам, в которые входят величины, измеряемые непосредственно, прямо. Такие, вычисляемые величины называются косвенными измерениями, а их ошибки определяются ошибками входящих в формулы величин.

В общем случае, абсолютная (и относительная) ошибка косвенно измеряемой величины определяется из правил дифференцирования функции Y многих переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$ для первого приближения:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial Y}{\partial x_i} \Delta x_i \right|, \qquad (1)$$

где $Y(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — косвенно измеряемая величина, зависящая от других (прямо) измеряемых независимых $x_1, x_2, \ldots, x_n$; Δx_i — погрешность (общая максимальная ошибка) величины x_i. $\dfrac{\partial Y}{\partial x_i}$ — частная производная по переменной x_i.

В простейшем случае, для одной независимой величины x имеем:

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial Y}{\partial x} \right| \Delta x \equiv \left| \frac{dY}{dx} \right| \Delta x, \qquad (2)$$

где $\dfrac{dY}{dx}$ — первая производная.
Для двух:

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial Y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial Y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 \qquad \text{и т.д.} \qquad (3)$$

Пример 1.

Вычислить погрешность круговой частоты ω колебаний пружины.

Известно, что $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = Y(k,m)$, где k – жесткость пружины, m – масса груза. Погрешность вычисляется по формуле (3):

$$\Delta\,\omega = \left|\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)'_k\right|\Delta k + \left|\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)'_m\right|\Delta m = \frac{\Delta k}{2\sqrt{km}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{\Delta m}{m},$$

где k – среднее арифметическое значение измерений величины жесткости; m – то же для массы; Δk и Δm – соответствующие погрешности. Если одна из этих величин берется из таблиц, то за погрешность берется половина наименьшего разряда значения (если $k = 3{,}333$, то $\Delta k = 0{,}0005$).

Пример 2.

Если $Y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, то относительная погрешность:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta\,x_1 + \Delta\,x_2 + \cdots + \Delta x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \qquad (4.1)$$

Для произведения $Y = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta\,x_1}{x_1} + \frac{\Delta\,x_2}{x_2} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{x_n} \qquad (4.2)$$

для $Y = \dfrac{x_1}{x_2}$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta\,x_1}{x_1} + \frac{\Delta\,x_2}{x_2} \qquad (4.3)$$

3. Случайные измерения и ошибки

Случайные измерения, содержащие случайные ошибки, описываются с помощью теории вероятности. Поэтому основное понятие теории случайных измерений — это вероятность.

3.1. Вероятность случайной величины

С понятием вероятности случайных событий мы встречаемся в своей повседневной деятельности, когда оцениваем шансы появления такого рода событий. Вероятность события A — это число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события. По определению, $0 \leq P(A) \leq 1$ — вероятность невозможного события равна нулю, достоверного равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах. Строгое введение понятия вероятности основывается на законе больших чисел.

Для описания вероятности введем отношение $\mu = \dfrac{m}{n}$ числа m появлений события A при n испытаниях; оно называется частотой этого события. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует число P такое, что при достаточно большом числе испытаний n $|\mu - P| < \varepsilon$. Число P называется вероятностью появления события A; по сути дела это предел, к которому стремится частота события A при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu = P$$

3.2. Распределение Гаусса для бесконечного числа случайных измерений

Для характеристики случайной величины нужно знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют закон распределения случайной величины. Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями, $\dfrac{1}{6}$, для каждого значения от 1 до 6. Это распределение *дискретной* случайной величины. Часто встречаются *непрерывные* случайные величины, возможные значения которых заполняют всю числовую ось (или некоторые интервалы).

В теории случайных ошибок измерений важное значение имеет *нормальный закон распределения* или *функция Гаусса.* Он справедлив, когда действуют сразу несколько источников ошибок, и ни один из них не доминирует; при этом каждый источник вносит лишь малую долю в общую ошибку. Нормальный закон распределения вероятности случайных ошибок описывается формулой Гаусса:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (5)$$

где x — случайная величина измерения; x_0 — ее истинное значение; чаще всего неизвестно; σ^2 — дисперсия распределения; $e = 2,71928$ — фундаментальная математическая постоянная.

На рис. 1 представлены графики $\rho(x)$ для трех различных значений дисперсии. Видно, что наибольшая вероятность измерения попадает на истинные значения — x_0.

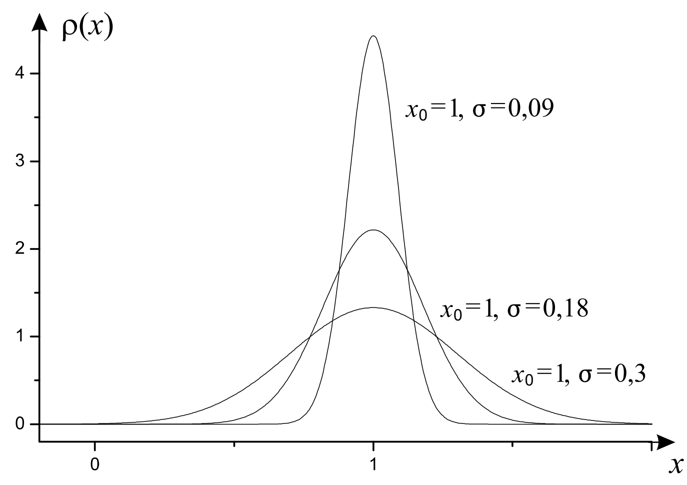

Рис. 1.

В математической статистике показывается, что в качестве истинного значения x_0 можно использовать *среднее арифметическое* из n измерений:

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \tag{6}$$

где x_i — значение i-го измерения случайной величины x. Чем больше проведено испытаний (n), тем лучше выполняется это утверждение, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = x_0$$

Подробно это будет рассмотрено ниже, в §4.

3.3. Средне-квадратичная ошибка случайных измерений

Форма кривых Гаусса устанавливает, насколько часто должны появляться ошибки той или иной величины.

Видно, что чем больше дисперсия случайной величины σ, тем шире кривая и ниже ее пик. Таким образом, для большой дисперсии вероятность, пропорциональная $\rho(x)$, слабо спадает при отклонении от истинного значения x_0. Наоборот, для малой дисперсии вероятность получить такое же измерение мала. Значение σ характеризует качество методики измерения: чем меньше дисперсия, тем лучше методика.

В реальном эксперименте мы имеем конечное число испытаний n. Поэтому, как и для среднего арифметического, вводится величина, характеризующая среднее отклонение случайной величины x от $\overline{x}$; она называется *средне-квадратичным отклонением (ошибкой)*:

$$S_n = \sqrt{\frac{(\overline{x} - x_1)^2 + (\overline{x} - x_2)^2 + \cdots + (\overline{x} - x_n)^2}{n-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)^2}{n-1}} \tag{7}$$

Оказывается, что при сколь угодно большом числе измерений, средне-квадратичная ошибка стремится к дисперсии:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sigma$$

и чем больше n, тем точнее равенство:

$$S_n \approx \sigma \tag{8}$$

Очевидно, что из опыта мы можем найти только S_n.

3.4. Доверительная вероятность.

Плотность вероятности $\rho(x)$ характеризует вероятность получить значение случайно величины x с точностью dx. Таким образом, $\rho(x)dx$ есть вероятность измерить в эксперименте значение x в пределах dx. Полная вероятность P получить в измерении

$$\begin{gathered} x_0 - \Delta x \ \leq \ x \ \leq \ x_0 + \Delta x \\ -\Delta x \ \leq \ (x - x_0) \ \leq \ \Delta x \end{gathered} \tag{9}$$

дается площадью под кривой распределения $\rho(x)$; математически площадь вычисляется через интеграл (Рис. 2):

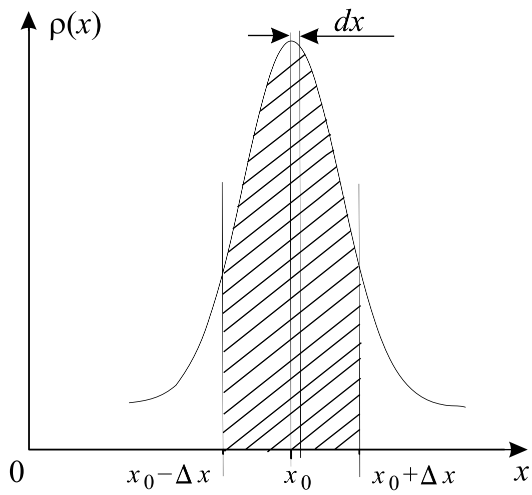

Рис. 2.

$$P\left(\begin{array}{c} (x_0-\Delta x)\ \le\ x\ \le\ (x_0+\Delta x) \\ \\ -\Delta x\ \le\ (x-x_0)\ \le\ \Delta x \\ \\ (x-\Delta x)\ \le\ x_0\ \le\ (x+\Delta x) \end{array}\right) = \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} \rho(x)dx = \alpha \quad (10)$$

Эта вероятность называется *надежностью* или *доверительной вероятностью.* Итак, α — это вероятность того, что единичный результат измерения отличается от истинного на величину, не большую Δx. Величина Δx называется *доверительным интервалом.* Вероятностное описание случайных измерений приводит нас к важному выводу: *понятие измерения включает в себя среднее арифметическое* величины (измеряемой прямо или косвенно), *доверительный интервал* Δx и *доверительную вероятность* α получить результат измерения с допуском в этом интервале.

Для любой величины Δx по формуле для нормального распределения (5) может быть рассчитана соответствующая доверительная вероятность α. Эти вычисления были проделаны и их результаты были сведены в таблицу 1:

ε	α	ε	α	ε	α	ε	α
0	0	0.9	0.63	2.0	0.95	3.1	0.9981
0.05	0.04	1.0	0.68	2.1	0.964	3.2	0.9986
0.1	0.08	1.1	0.73	2.2	0.972	3.3	0.9990
0.15	0.12	1.2	0.77	2.3	0.978	3.4	0.9993
0.2	0.16	1.3	0.80	2.4	0.984	3.5	0.9995
0.3	0.24	1.4	0.84	2.5	0.988	3.6	0.9997
0.4	0.31	1.5	0.87	2.6	0.990	3.7	0.9998
0.5	0.38	1.6	0.89	2.7	0.993	3.8	0.99986
0.6	0.45	1.7	0.91	2.8	0.995	3.9	0.99990
0.7	0.51	1.8	0.93	2.9	0.996	4.0	0.99993
0.8	0.57	1.9	0.94	3.0	0.997		

В таблице фигурирует относительная величина $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\sigma}$. Чтобы воспользоваться таблицей 1, необходимо знать дисперсию σ; ее находят приближенно, приравнивая средне-квадратичной ошибке S_n; последняя вычисляется подстановкой экспериментальных данных. Одна из задач обработки случайных измерений сводится к заданию доверительной вероятности и нахождению соответствующего ей доверительного интервала. Возможна и обратная задача: задается Δx, а находится α. Например, доверительная вероятность, соответствующая доверительному интервалу $\Delta x = \sigma$ $(\varepsilon = 1)$, есть 0.68;

$$\begin{array}{lcl} \Delta x = 2\,\sigma & \longrightarrow & \alpha = 0.95 \\ \Delta x = 3\,\sigma & \longrightarrow & \alpha = 0.997 \end{array}$$

Видно, что чем больше доверительный интервал, тем выше доверительная вероятность (надежность). Это очевидно из Рис. 2: заштрихованная площадь под кривой тем больше, чем больше интервал Δx. В тех случаях, где необходима высокая надежность (военная техника, авиация, космонавтика и др.) допуск становится несколько σ. Чтобы в этом случае техника четко работала надо резко снижать дисперсию, что достигается с помощью высоких технологий.

3.5. Закон сложения случайных ошибок

Если случайная величина z измеряется косвенно и

$$z = x \pm y,$$

где x, y — не зависимо измеряемые случайные величины со средне-квадратичной ошибкой S_n и S_y соответственно, то средне-квадратичная ошибка величины z находится по формуле:

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2 \tag{11}$$

В общем случае многих N случайных величин X_i:

$$S_z^2 = \sum_{i=1}^{N} S_{X_i}^2 \tag{11.1}$$

Например, пусть для двух случайных величин X и Y их средне-квадратичные ошибки S_x и $S_y = \dfrac{S_x}{2}$. Тогда из (11) $S_z \approx 1.1\, S_x$

Таким образом, *для повышения точности измерений при наличии нескольких случайных величин необходимо уменьшать ошибку, имеющую наибольшую величину.*

Второе следствие закона сложения случайных величин еще важнее и касается погрешности среднего арифметического.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты отдельных равноточных измерений (с одинаковой точностью) с дисперсией $\sigma \approx S_n$. Среднее арифметическое $\overline{x} = \dfrac{x_1}{n} + \dfrac{x_2}{n} + \cdots + \dfrac{x_n}{n}$. Тогда в соответствии с (11.1):

$$S_{\overline{x}}^2 = \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = \frac{S_n^2}{n}$$

$$S_{\overline{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

Таким образом, *среднее арифметическое имеет меньшую ошибку, чем результат каждого отдельного измерения.*

3.6. Среднее арифметическое и истинное значение измеряемой величины. Распределение Стьюдента для конечного числа измерений

Поскольку среднее арифметическое $\overline{x}$ имеет меньшую ошибку, то надо решить задачу: насколько оно близко к истинному x_0 при n измерениях. Подобно случаю нормального распределения, справедливого при $n \to \infty$, составим отношение:

$$\frac{|x_0 - \overline{x}|}{S_{\overline{x}}} = \frac{\Delta x}{S_n}\sqrt{n} \equiv t_{\alpha,n} \qquad (13)$$

Числа $t_{\alpha,n}$ называются *коэффициентами Стьюдента*, они зависят от выбранной (или искомой) надежности α и числа измерений n. Таким образом, коэффициенты $t_{\alpha,n}$ играют такую же роль, как и $\varepsilon\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)$, но для *конечного* числа измерений. Для малого числа измерений использование нормального распределения (5) даст ошибку, и тем большую, чем меньше n. Значит надо использовать более точное распределение вероятностей, зависящее от n. Такие распределения для $n \geq 2$ были рассчитаны и затабулированы (сведены в таблицы, таблица 2) и названы распределением Стьюдента; роль нормированной ошибки $\varepsilon\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)$ теперь играют коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ из (13).

Из этой таблицы видно, что при больших n величины $t_{\alpha,n}$ стремятся к соответствующим значениям величин ε: например, для вероятности α=0.7 при $n \to \infty$ $\quad t_{0.7,n} \to 1.0$; для α=0.95 $\quad t_{0.95,n} \to 2.0$ (сравним с нормальным распределением: для α=0.68 ε =1.0, для α=0.95, ε =2.0). Это и естественно, так как при повышении n $\; S_n \to \sigma$. Для малых же значений n при заданной вероятности α $t_{\alpha,n}$ становится больше ε. Если не учесть это обстоятельство, то использование ε вместо $t_{\alpha,n}$ привело бы к занижению Δx:

$$\Delta\ x = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n}\ >\ \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ \varepsilon \qquad (14)$$

Используя коэффициенты Стьюдента, можно переписать равенство (10) в виде:

$$P(\overline{x} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n}\ <\ x_0\ <\ \overline{x} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n})\ =\ \alpha \qquad (15)$$

Это вероятность того, что истинное значение x_0 лежит в интервале $(\overline{x} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n}\ ,\ \ \overline{x} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n})$. Она также называется доверительной вероятностью для доверительного интервала $\Delta\, x = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha,n}$.

Приведём пример из экспериментальной физики. Для того, чтобы подтвердить закон Малю в поляризационных измерениях получили значения суммарной интенсивности $W_o + W_e$ света обыкновенного луча совместно с необыкновенным:

№	дел.	№	дел.	№	дел.
1	30	7	24	13	39
2	27	8	27	14	41
3	25	9	29	15	43
4	18	10	33	16	44
5	16	11	35	17	45
6	23	12	37	18	43

После вычислений имеем:
$n = 18$
$\overline{x} = 32.17$ дел.
S_n=9.17 дел.

Закон Малю гласит: $W_o + W_e = const.$
С какой точностью справедлив этот закон для доверительной вероятности $\alpha = 0.95$?
Решение:
используем (14), где $S_n = 9.17,\ n = 18,\ t_{0.95,18} = 2.1$ (из табл. 2):

$$\Delta x = \frac{9.17}{\sqrt{18}} \cdot 2.1 = 4.54 \text{ дел.}$$

Относительная ошибка $\dfrac{\Delta\, x}{\overline{x}} = 0.14 = 14\%$.
Ответ: для вероятности $\alpha = 0.95$ закон Малю справедлив с точностью 14%.

3.7. Обнаружение промахов

Можно считать некоторое измерение промахом, если вероятность случайного появления такого значения достаточно мала. Рассмотрим эту проблему подробнее. Будем использовать нормальный закон распределения для $n \to \infty$. Привлечение более точного распределения Стьюдента существенно более точного результата не даст. Как сказано выше, вероятность появления значения, отклоняющегося от среднего арифметического ($\overline{x}$) более, чем на $3\,\sigma$, равно 0.003. Все измерения, отличающиеся от $\overline{x}$ на эту (или бо́льшую) величину, могут быть отброшены как маловероятные. Если измерения даются легко, то лучше отбросить сильно отклоняющиеся значения — это не приведет к существенной ошибке, но исключит промах.

Если же измерений мало или они трудоемкие, то следует проверять наличие промахов.

Во-первых, полезно посмотреть, как сильно он меняет окончательный результат. Во-вторых, если вероятность β данного значения измерения лежит в интервале $(0.1, 0.01)$, то неважно, оставить это значение или отбросить. При $\beta > 0.1$ следует его оставить, при $\beta < 0.01$ — отбросить.

3.8. Совместный учёт систематических и случайных ошибок. Несколько случайных величин

Совместный учёт систематических (δ) и случайных ошибок необходим тогда, когда по каким-либо причинам невозможно уменьшить значение случайной ошибки ($\Delta\, x = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\; t_{\alpha,n}$) так, чтобы $\Delta\, x_{\text{случ.}} \ll \Delta\, x_{\text{систем.}}$. В качестве верхней общей ошибки можно принять

$$\sum = \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot 2\right)^2} \qquad \text{для } \alpha = 0.95 \tag{16}$$

где: для коэффициента Стьюдента взято значение 2.

Если случайные ошибки очень малы, т.е.

$$4S_n^2 \ll \delta^2, \tag{17}$$

то можно ограничится одним измерением. Другой случай допустимости однократного измерения, когда достаточно грубого измерения (оценка).

Если ищут величину, зависящую от нескольких прямо измеряемых независимых случайных величин, тогда доверительная вероятность для этой косвенно измеряемой величины есть произведение:

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n, \tag{18}$$

где: $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots$ - доверительная вероятность для входящих в формулу прямо измеряемых независимых случайных величин. Ясно, что в этом случае надо стремиться к тому, чтобы каждая вероятность была как можно ближе к 1.

4. Обработка измерений

4.1. Число знаков при вычислении погрешностей

Теория математической статистики показывает, что для $n \le 10$ погрешность самой ошибки можно определить не точнее 30 %. Таким образом, нет смысла оставлять два и более знака в погрешности, если старший разряд её числового значения больше 3:

$$\Delta\, x \ = \ 0.357$$

$$\Delta\,(\Delta\, x) \cong 0.3 \cdot 0.357 \ \cong \ 0.11$$

Видно, что старший разряд последней ошибки находится в десятых долях; поэтому надо округлить: $\Delta\, x \ = \ 0.357 \ \approx \ 0.4 \ \pm \ 0.1\,.$

Если старший разряд $\Delta\, x$ равен 3 или меньше, то надо сохранять при округлении два разряда:

$$\Delta\, x = 0.226$$

$$\Delta\,(\Delta\,x) \cong 0.3 \cdot 0.226 = 0.07 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\,x \approx 0.23 \pm 0.07$$

Погрешность ошибки при обработке измерений не вычисляют.

4.2. О точности вычислений

Точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений. Вычисления, проведенные с бо́льшим числом знаков, чем это необходимо, создают ложное впечатление о большой точности измерений. В то же время не следует ухудшать результаты измерений, грубо округляя измерения. Во всех случаях необходимо придерживаться правила: *ошибка, получающаяся в результате вычислений должна быть на порядок (т.е. в* 10 *раз) меньше общей ошибки измерений.*

4.3. Процесс обработки вычислений (измерений величины y)

1. Проводятся все прямые измерения с максимальной точностью.
2. Вычисляются их средние арифметические и средне-квадратичные: $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ \ldots \ ; S_{n_1}, S_{n_2}, \ \ldots \ .$
3. Вычисляются доверительные интервалы $\Delta\,x_1, \Delta\,x_2, \ldots$ по формуле:

$$\Delta\,x_i = t_{0.95,\,n_i} \cdot \frac{S_{n_i}}{\sqrt{n_i}} \tag{19}$$

где: $\alpha = 0.95$; для нескольких случайных величин, которые можно измерить непосредственно, берем $\alpha = 0.98$;
n_i - количество измерений данной величины.
Полученные значения округляются до двух значащих цифр.
4. Вычисляется общая ошибка для каждой прямо измеренной случайной величины по формуле (16):

$$\Delta_i = \sqrt{{\delta_i}^{2} \ + \ \Delta\,{x_i}^{2}} \tag{20}$$

где: δ_i -систематическая ошибка при измерении случайной величины x_i. Округление – до двух значащих цифр.

5. По формуле для погрешности косвенно измеренной величины (формулы $1 \div 4$) вычисляется $\Delta\, y$; в качестве $\Delta\, x_1, \Delta\, x_1, \ldots$ берутся $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ из (20). Округление идёт до двух значащих цифр, если число измерений $n > 10$, и до одной цифры при $n < 10$.
6. В рабочую формулу подставляются средние $\overline{x}_i$ и вычисляется $\overline{y}$ – косвенно измеренная искомая величина. Округление проводится до знака, отвечающего наименьшему разряду (знаку) в погрешности $\Delta\, y$.
7. Вычисляется относительная ошибка $\dfrac{\Delta\, y}{\overline{y}}$.
8. Результат обработки записывается в виде:

$$y = \overline{y} \pm \Delta\, y$$

с вероятностью $\quad \alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ \ldots$
9. Если требуется сравнить экспериментальные кривые с N точками с теоретическими, то вычисляется средне-квадратичное отклонение:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{(y\text{теор}_k - y_k)^2}{N-1}} \ \equiv \ S_N$$

где: $y\text{теор}_k$ – теоретические значения величины y в k-ой точке, заданные в массиве размером N; y_k – значение прямых измерений k-ой точки.
10. Вычисляется

$$\Delta\ y = t_{0.95,N}\ \frac{S_N}{\sqrt{N}} \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta\ y}{y}\ \equiv\ \delta.$$

Теория справедлива с точностью δ для доверительной вероятности 0.95.

4.4. Пример обработки измерений из экспериментальной физики

В работе „Интерференционный опыт Юнга“для вычисления ошибки косвенных измерений (расстояния между щелями) используется величина $\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta \overline{y}}$ – относительная ошибка измерения расстояния между максимумами интенсивности света; здесь: $\overline{\Delta\, y}$ – средне-арифметическое расстояние между соседними максимумами; $\Delta(\Delta\, y)$ – его общая абсолютная ошибка.

Определение $\Delta(\Delta\, y)$ в этой работе нетривиально: большие флуктуации тока из-за большой чувствительности установки к вибрациям и механическим напряжениям, расстояние между максимумами мало, сами максимумы пологие. Чтобы учесть большие флуктуации, производится серия измерений $(20 \div 30)$ тока фотодиода при одних и тех же условиях (снятие статистики). Зададимся надежностью (доверительной вероятностью) 0,95. Из таблицы для коэффициентов Стьюдента находим для $n = 20$, $t_{0.95,\,20} = 2.1$; соответствующий доверительный интервал $\Delta\, i = 2.1 \cdot \dfrac{S_{20}}{\sqrt{20}}$ (см. формулу (19)), где S_{20} – средне-квадратичная ошибка (формула (7)). В этой работе систематическая ошибка измерения тока много меньше случайной, поэтому общая ошибка состоит только из случайной. S_{20} – вычисляется на основе 20 измерений. Ошибка положения максимума $\Delta(\Delta\, y)$ находится в пределах $\Delta\, i$ по графику, построенному на основе проведенных измерений интерференционного поля (Рис. 3).

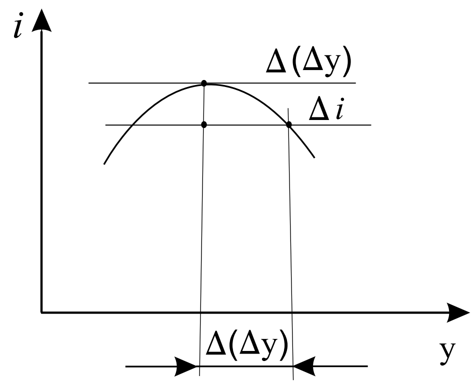

Рис. 3.

Наконец, чтобы повысить точность, измеряется расстояние между самыми дальними максимумами, которые удалось измерить $\Delta\, y_k$; это можно делать, т.к. расстояние между любыми соседними максимумами (их много) одинаковы. При этом относительная ошибка уменьшается в $(k-1)$ раз, где k – число задействованных максимумов. Таким образом, искомая относительная ошибка равна

$$\frac{\Delta(\Delta\, y)}{\Delta\, y_k}, \qquad \Delta\, y_k = (k-1)\Delta\, y,$$

где $\Delta\, y$ – расстояние между максимумами, входящее в рабочую формулу и вычисляемое из последнего соотношения.

Доверительная вероятность общего результата вычисления расстояния между щелями определяется именно флуктуациями тока и равна 0.95.

5. Перечень контрольных вопросов

1. Абсолютная и относительная ошибки.
2. Систематические ошибки и их виды.
3. Случайные ошибки, их характеристики.
4. Наиболее вероятное значение измеряемой величины.
5. Средне-квадратичная ошибка и ее смысл.
6. Что входит в общее понятие измерения? Когда достаточно провести единичное измерение?
7. Как повысить точность измерения случайной величины, являющейся суммой нескольких с разными дисперсиями?
8. Погрешность среднего арифметического.
9. Совместный учет систематических и случайных ошибок. Запись конечного результата измерений. Правила округления.
10. Как узнать, что в эксперименте допущен промах?
11. Правила округления при вычислениях по формулам для косвенно измеряемых величин.
12. Косвенные и прямые измерения. Правила нахождения ошибки косвенного измерения. Частные случаи для сложения, вычитания, умножения, деления.
13. Доверительный интервал для реального эксперимента с конечным числом измерений. Коэффициенты Стьюдента.

6. Литература

1. Под ред. *А.А. Пинского.* Физика, 10кл. 2001г. Гл. 9.
2. *А.Н. Зайдель.* Элементарные оценки ошибок измерений. 1968 г.