Лекция 10. Основы теории случайных ошибок и методов оценки случайных погрешностей в измерениях

Анализ случайных погрешностей основывается на теории случайных ошибок, дающей возможность с определенной гарантией вычислить действительное значение измеренной величины и оценить возможные ошибки.

Основу теории случайных ошибок составляют следующие предположения:

при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;

большие погрешности встречаются реже, чем малые (вероятность появления погрешности уменьшается с ростом ее величины);

при бесконечно большом числе измерении истинное значение измеряемой величины равно среднеарифметическому значению всех результатов измерений;

появление того или иного результата измерения как случайного события описывается нормальным законом распределения.

На практике различают генеральную и выборочную совокупность измерений.

Под генеральной совокупностью подразумевают все множество возможных значений измерений x_i или возможных значений погрешностей Δx_i .

Для выборочной совокупности число измерений n ограничено, и в каждом конкретном случае строго определяется. Считают, что, если $n > 30$, то среднее значение данной совокупности измерений $\overline{x}$ достаточно приближается к его истинному значению.

1. интервальная оценка с помощью доверительной

вероятности

Для большой выборки и нормального закона распределения общей оценочной характеристикой измерения являются дисперсия D и коэффициент вариации k_B :

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}\ ;\ k_B = \sigma/\overline{x}\ .\ (1.1)$$

Дисперсия характеризует однородность измерения. Чем выше , тем больше разброс измерений.

Коэффициент вариации характеризует изменчивость. Чем выше k_B, тем больше изменчивость измерений относительно средних значений.

Для оценки достоверности результатов измерений вводятся в рассмотрение понятия доверительного интервала и доверительной вероятности.

Доверительным называется интервал значений , в который попадает истинное значение $x_Д$ измеряемой величины с заданной вероятностью.

Доверительной вероятностью(достоверностью) измерения называется вероятность того, что истинное значение измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал, т.е. в зону $a \le x_Д \le b$. Эта величина определяется в долях единицы или в процентах

$$P_Д = P[a \le x_Д \le b] = 0.5\left[\frac{\varphi(b-\bar{x})}{\sigma} - \frac{\varphi(a-\bar{x})}{\sigma}\right],$$

где $\varphi(t)$ - интегральная функция Лапласа (***табл.1.1***)

Интегральная функция Лапласа определяется следующим выражением:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Аргументом этой функции является ***гарантийный коэффициент***:

$$t = \frac{\mu}{\sigma}, \quad где \quad \mu = (b-\bar{x}); \quad \mu = -(a-\bar{x}). \quad (1.2)$$

Таблица 1.1

Интегральная функция Лапласа

t	$p_Д$	t	$p_Д$	t	$p_Д$
0,00	0,0000	0,75	0,5467	1,50	0,8664
0,05	0,0399	0,80	0,5763	1,55	0,8789
0,10	0,0797	0,85	0,6047	1,60	0,8904
0,15	0,1192	0,90	0,6319	1,65	0,9011
0,20	0,1585	0,95	0,6579	1,70	0,9109
0,25	0,1974	1,00	0,6827	1,75	0,9199
0,30	0,2357	1,05	0,7063	1,80	0,9281
0,35	0,2737	1,10	0,7287	1,85	0,9357
0,40	0,3108	1,15	0,7419	1,90	0,9426
0,45	0,3473	1,20	0,7699	1,95	0,9488
0,50	0,3829	1,25	0,7887	2,00	0,9545
0,55	0,4177	1,30	0,8064	2,25	0,9756
0,60	0,4515	1,35	0,8230	2,50	0,9876
0,65	0,4843	1,40	0,8385	3,00	0,9973
0,70	0,5161	1,45	0,8529	4,00	0,9999

Если же на основе определенных данных установлена доверительная вероятность $P_Д$ (часто ее принимают равной $0.90; 0.95; 0.9973$), то устанавливается ***точность измерений***(***доверительный интервал*** 2μ) на основе соотношения

$$P_Д = \varphi(\mu/\sigma).$$

Половина доверительного интервала равна

$\mu = \sigma \arg \varphi(P_Д) = t\sigma$, (1.3)

где $\arg \varphi(P_Д)$ - аргумент функции Лапласа, если $n \geq 30$ (***табл.1.1***);

- функции Стьюдента, если $n < 30$ (***табл.1.2***).

Таким образом, доверительный интервал характеризует точность измерения данной выборки, а доверительная вероятность - достоверность измерения.

Пример

Выполнено 30 измерений прочности дорожного покрытия участка автомобильной дороги при среднем модуле упругости $E = 170\ МПа$ и вычисленном значении среднеквадратического отклонения $\sigma = 3.1\ МПа$.

Необходимо определить требуемую точность измерений для разных уровней доверительной вероятности , приняв значения t по***табл.1.1***.

В этом случае соответственно |

$\mu = \pm 3.1 \cdot 1.65 = 5.1; \quad \pm 3.1 \cdot 2.0 = 6.2; \quad \pm 3.1 \cdot 3.0 = 9.3\ МПа$

Следовательно, для данного средства и метода измерений доверительный интервал возрастает примерно в 2 раза, если увеличить $P_Д$ только на 10% .

Таблица 1.2

Коэффициент Стьюдента $\alpha_{СТ}$

n	$p_Д$					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
2	3,080	6,31	12,71	63,70	127,30	637,20
3	1,886	2,92	4,30	9,92	14,10	31,60
4	1,638	2,35	3,188	5,84	7,50	12,94
5	1,533	2,13	2,77	4,60	5,60	8,61
6	1,476	2,02	2,57	4,03	4,77	6,86
7	1,440	1,94	2,45	3,71	4,32	9,96
8	1,415	1,90	2,36	3,50	4,03	5,40
9	1,397	1,86	2,31	3,36	3,83	5,04
10	1,383	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
12	1,363	1,80	2,20	3,11	3,50	4,49
14	1,350	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
16	1,341	1,75	2,13	2,95	3,29	4,07
18	1,333	1,74	2,11	2,90	3,22	3,96
20	1,328	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88
30	1,316	1,70	2,04	2,75	3,20	3,65
40	1,306	1,68	2,02	2,70	3,12	3,55
50	1,298	1,68	2,01	2,68	3,09	3,50
60	1,290	1,67	2,00	2,66	3,06	3,46
∞	1,282	1,64	1,96	2,58	2,81	3,29

Пример

Определить достоверность измерений для установленного доверительного интервала $\mu = \pm 7\ МПа$.

По формуле (1.2) имеем: $t = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{7}{3.1} = 2.26$.

По **табл.1.1**для $t = 2.26$ определяем $P_Д = 0.97$.

Это означает, что в заданный доверительный интервал из 100 измерений не попадают только 3.

Значение $\left(1 - P_Д\right)$ ***называютуровнем значимости***.Из него следует, что при нормальном законе распределения погрешность, превышающая доверительный интервал, будет встречаться один раз из $n_И$ измерений, где

$$n_И = \frac{P_Д}{1 - P_Д}. \quad (1.4)$$

Это означает, что приходится браковать одно из измерений.

По данным приведенных выше примеров можно вычислить количество измерений, из которых одно измерение превышает доверительный интервал.

Если $P_Д = 0.9$, то по формуле (1.4) определяется $n_И = 0.9/(1 - 0.9) = 9$ измерений.

Если равна 0.95 и 0.9973, соответственно 19 и 367 измерений.

2. определение минимального количества измерений

Для проведения опытов с заданной точностью и достоверностью необходимо знать то количество измерений, при котором экспериментатор уверен в положительном исходе.

В связи с этим одной из первоочередных задач при статистических методах оценки является установление минимального, но достаточного числа измерении для данных условий.

Задача сводится к установлению минимального объема выборки (числа измерении) $N_{\min}$ при заданных значениях доверительного интервала и доверительной вероятности $P_Д$.

При выполнении измерений необходимо знать их точность:

$$\Delta = \frac{\sigma_0}{\bar{x}}; \quad \sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.1)$$

где σ_0 - среднеарифметическое значение среднеквадратического отклонения σ.

Значение часто называют ***средней ошибкой***.

Доверительный интервал ошибки измерения Δ определяется выражением

$\mu = t\sigma_0$.

С помощью легко определить доверительную вероятность ошибки измерений по ***табл.1.1***.

В исследованиях часто по заданной точности и доверительной вероятности измерения определяют минимальное количество измерений, гарантирующих требуемые значения и .

При $N_{\min} = n$ **получаем**

$$N_{\min} = \frac{\sigma^2 t^2}{\Delta^2}, \quad (2.2)$$

Для определения может быть принята такая последовательность вычислений.

1.Проводится предварительный эксперимент с количеством измерений n, которое составляет в зависимости от трудоемкости опыта от 20 до 50.

2.Вычисляется среднеквадратическое отклонение по формуле (1.1).

3.В соответствии с поставленными задачами эксперимента устанавливается требуемая точность измерений , которая не должна превышать точности прибора.

4.Устанавливается нормированное отклонение,значение которого обычно задается (зависит также от точности метода).

5.По формуле (2.2) определяют $N_{\min}$ и в дальнейшем в процессе эксперимента число измерений не должно быть меньше .

Пример

При приемке сооружений комиссия в качестве одного из параметров замеряет их ширину. Согласно инструкции требуется выполнять 25 измерений. Допускаемое отклонение параметра $\Delta = \pm 0.1\ м$. Если предварительно вычисленное значение $\sigma = 0.4\ м$, то можно определить, с какой достоверностью комиссия оценивает данный параметр.

Из формулы (2.2) можно записать

$t = \sqrt{n} \cdot \Delta/\sigma = \sqrt{25} \cdot 0.1/0.4 = 1.25$.

В соответствии с ***табл.10.1***доверительная вероятность для $t = 1.25 P_Д = 0.79$.

Это низкая вероятность.

Погрешность, превышающая доверительный интервал $2\mu = 0.2\ м$, согласно выражению (1.4) будет встречаться один раз из $0.79/(1 - 0.79) = 3.37$, т.е. из четырех измерений. Это недопустимо.

В связи с этим необходимо вычислить минимальное количество измерений с доверительной вероятностью , равной 0.9 и .

По формуле (2.2) имеем $N_{\min} = 0.4^2 \cdot 1.65^2 / 0.1^2 = 43$ измерения при $P_Д = 0.90$ и 64 измерения при $P_Д = 0.95$, что значительно превышает установленные измерений.

Для нахождения границы доверительного интервала при малых значениях ($n < 30$) применяют метод, предложенный в 1908 г. английским математиком Госсетом В.С. (псевдоним Стьюдент).

Кривые распределения Стьюдента в случае $n \to \infty$ (практически при $n > 20$) переходят в кривые нормального распределения (***рис.10.1***).

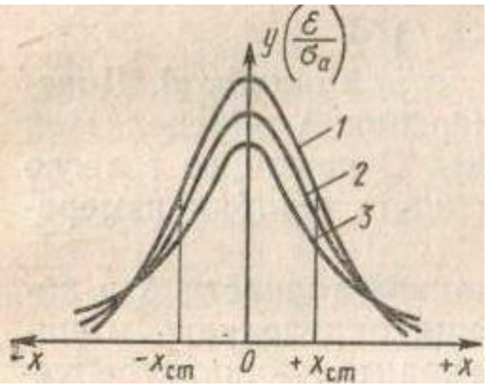

Рис.2.1. Кривые распределения Стьюдента для различных значений:

1- при $n \to \infty$;*2*- при $n = 10$;*3*- при $n = 2$

Для малой выборки доверительный интервал

$\mu_{CT} = \sigma_0 \alpha_{CT}$, (2.3)

где α_{CT} - коэффициент Стьюдента, принимаемый по***табл.1.2***

в зависимости от значения доверительной вероятности .

Зная μ_{CT}, можно вычислить действительное значение изучаемой величины для малой выборки

$x_Д = \bar{x} \pm \mu_{CT}$. (2.4)

Возможна и иная постановка задачи.

По известных измерений малой выборки необходимо определить доверительную вероятность при условии, что погрешность среднего значения не выйдет за пределы $\pm \mu_{CT}$.

Задачу решают в такой последовательности:

1.Вначале вычисляется среднее значение $\overline{x}$,и $\alpha_{CT} = \mu_{CT} / \sigma_0$.

2.С помощью величины , известного и*табл.1.2*определяют доверительную вероятность.

В процессе обработки экспериментальных данных следует исключить грубые ошибки ряда. Появление этих ошибок вполне вероятно, а наличие их ощутимо влияет на результат измерений. Однако прежде чем исключить то или иное измерение, необходимо убедиться, что это действительно грубая ошибка, а не отклонение вследствие статистического разброса.

Известно несколько методов определения грубых ошибок статистического ряда. Наиболее простым способом исключения из ряда резко выделяющегося измерения является ***правило "трех сигм": разброс случайных величин от среднего значения не должен превышать***

$x_{\max,\,\min} = \overline{x} \pm 3\sigma$. (2.5)

Более достоверными являются методы, базируемые на использовании доверительного интервала.

Пусть имеется статистический ряд малой выборки, подчиняющийся закону нормального распределения. При наличии грубых ошибок критерии их появления вычисляются по формулам

$$\beta_1 = \frac{x_{\max} - \overline{x}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}; \quad \beta_2 = \frac{\overline{x} - x_{\min}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}, \quad (2.6)$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ - наибольшее и наименьшее значения из измерений.

В ***табл.2.1***приведены максимальные значения $\beta_{\max}$, возникающие вследствие статистического разброса, в зависимости от доверительной вероятности.

Если $\beta_1 > \beta_{\max}$, то значение $x_{\max}$ необходимо исключить из статистического ряда как грубую погрешность.

Если $\beta_2 < \beta_{\max}$ исключается величина $x_{\min}$.

После исключения грубых ошибок определяют новые значения и из $(n-1)$ или $(n-2)$ измерений.

Таблица 2.1

Критерий появления грубых ошибок

n	β_{max} при $p_Д$ 0,90	0,95	0,99	n	β_{max} при $p_Д$ 0,90	0,95	0,99
3	1,41	1,41	1,41	15	2,33	2,49	2,80
4	1,64	1,69	1,72	16	2,35	2,52	2,84
5	1,79	1,87	1,96	17	2,38	2,55	2,87
6	1,89	2,00	2,13	18	2,40	2,58	2,90
7	1,97	2,09	2,26	19	2,43	2,60	2,93
8	2,04	2,17	2,37	20	2,45	2,62	2,96
9	2,10	2,24	2,46	25	2,54	2,72	3,07
10	2,15	2,29	2,54	30	2,61	2,79	3,16
11	2,19	2,34	2,61	35	2,67	2,85	3,22
12	2,23	2,39	2,66	40	2,72	2,90	3,28
13	2,26	2,43	2,71	45	2,76	2,95	3,33
14	2,30	2,46	2,76	50	2,80	2,99	3,37

Второй метод установления грубых ошибок основан на использовании критерия Романовского В.И. и применим также для малой выборки.

Методика выявления грубых ошибок сводится к следующему.

1.Задаются доверительной вероятностью и по***табл.2.2***в зависимости от находится коэффициент q .

2.Вычисляют предельно допустимую абсолютную ошибку отдельного измерения

$\varepsilon_{ПР} = \sigma_q$. (2.7)

Если $\bar{x} - x_{\max} > \varepsilon_{ПР}$, то измерение $x_{\max}$ исключают из ряда наблюдений.

В случае более глубокого анализа экспериментальных данных рекомендуется такая последовательность:

1.После получения экспериментальных данных в виде статистического ряда его анализируют и исключают систематические ошибки.

2.Анализируют ряд в целях обнаружения грубых ошибок и промахов:

устанавливают подозрительные значения или $x_{\min}$;

определяют среднеквадратичное отклонение ;

вычисляют по (2.6) критерии β_1, β_2 и сопоставляют с $\beta_{\max}, \beta_{\min}$, исключают при необходимости из статистического ряда или и получают новый ряд из новых членов.

3.Вычисляют среднеарифметическое,погрешности отдельных измерений $\left(\bar{x} - x_i\right)$ и среднеквадратичное очищенного ряда .

4.Находят среднеквадратичное серии измерений, коэффициент вариации .

5. При большой выборке задаются доверительной вероятностью $P_Д = \varphi(t)$ или уравнением значимости и по ***табл.1.1*** определяют .

6. При малой выборке ($n \le 30$) в зависимости от принятой доверительной вероятности и числа членов ряда принимают коэффициент Стьюдента $\alpha_{СТ}$; с помощью формулы (1.2) для большой выборки или (2.3) для малой выборки определяют доверительный интервал.

Таблица 2.2 Таблица 2.3

n	Значение α при $P_Д$: 0,95	0,98	0,99	0,995
2	15,56	38,97	77,96	779,7
3	4,97	8,04	11,46	36,5
4	3,56	5,08	6,58	14,46
5	3,04	4,10	5,04	9,43
6	2,78	3,64	4,36	7,41
7	2,62	3,36	3,96	6,37
8	2,51	3,18	3,71	5,73
9	2,43	3,05	3,54	5,31
10	2,37	2,96	3,41	5,01
12	2,29	2,83	3,23	4,62
14	2,24	2,74	3,12	4,37
16	2,20	2,68	3,04	4,20
18	2,17	2,64	3,00	4,07
20	2,15	2,60	2,93	3,98
	1,96	2,33	2,58	3,29

x_i	$x_i - x'$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - x')^2$
67	−8	−7,83	64
67	−8	−7,83	64
68	−7	−6,83	49
68	−7	−6,83	49
69	−6	−5,83	36
70	−5	−4,83	25
71	−4	−3,83	16
73	−2	−1,83	4
74	−1	−0,83	1
75	0	+0.17	0
76	+1	+1.17	1
77	+2	+2,17	4
78	+3	+3,17	9
79	+4	+4,17	16
80	+5	+5,17	25
81	+6	+6,17	36
82	+7	+7,17	49
92	+17	+17,27	289
$\bar{x}$ = 74,83	Σ = −3	Проверка −46,5 = 46,5	Σ = 737

7. Устанавливают по (2.4) действительное значение исследуемой величины.

8. Оценивают относительную погрешность (%) результатов серии измерений при заданной доверительной вероятности $P_Д$:

$$\delta = \frac{\delta_0 \alpha_{CT}}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (2.8)$$

Если погрешность серии измерений соизмерима с погрешностью прибора $B_{ПР}$, то границы доверительного интервала

$$\mu_{CT} = \sqrt{\sigma_0^2 \alpha_{CT}^2 + \left[\frac{\alpha_{CT}(\infty)}{3}\right]^2} \quad (2.9)$$

Формулой (2.9) следует пользоваться при $\alpha_{CT}\sigma_0 \le 3B_{ПР}$.

Если же $\alpha_{CT}\sigma_0 > 3B_{ПР}$, то доверительный интервал вычисляют с помощью (1.1) или (2.4).

Пример

Пусть имеется 18 измерений (***табл.2.3***). Анализ средств и результатов измерений показал, что систематических ошибок в эксперименте не обнаружено. Необходимо выяснить, не содержат ли измерения грубых ошибок.

Если воспользоваться ***первым методом (критерий)***, то надо вычислить среднеарифметическое $\bar{x}$ и отклонение .

При этом удобно пользоваться формулой

$$\bar{x} = \overline{x'} + \frac{x_i - \overline{x'}}{n},$$

где $\overline{x'}$ - среднее произвольное число.

Если принять $\overline{x'} = 75$ то $x = 75 - 3/18 = 74.83$.

В формуле (1.1) значение $\left(\bar{x} - x_i\right)^2$ можно найти упрощенным методом:

$$\left(\bar{x} - x_i\right)^2 = \sum\left(x_i - \overline{x'}\right) - \frac{\left(x_i - \overline{x'}\right)^2}{n} = \left(\bar{x} - x_i\right)^2 = 737 - \frac{3^2}{18} = 736.5.$$

Используя (1.1), получим

$$\sigma = \frac{736.5}{18-1} = 6.58; \quad k_B = \frac{6.58}{74.83} \cdot 100\% = 8.8\%.$$

Следовательно

$$\beta_1 = \frac{(92 - 74.83)}{6.58 \cdot \sqrt{\dfrac{18-1}{18}}} = 2.68.$$

Как видно из ***табл.2.1***, при доверительной вероятности $P_Д = 0.99$ и $n = 18$ $\beta_{\max} = 2.90$.

Поскольку $2.68 < \beta_{\max}$ измерение 92 не является грубым промахом.

Если $P_Д = 0.95$, $\beta_{\max} = 2.58$ то значение следует исключить.

Если применить правило 3σ, то

$$x_{\max,\,\min} = 74.83 \pm 3 \cdot 6.58 = 94.6...55.09$$

т.е. измерение следует оставить.

В случае, когда измерение исключается,

$$\bar{x} = 73.8; \quad \sigma = 5.15;$$

Среднеквадратичное отклонение для всей серии измерений

$$\sigma_0 = \frac{6.58}{18} = 1.55$$ при .

При очищенном ряде

$$\sigma_0 = \frac{5.15}{17} = 1.25$$.

Поскольку $n < 30$, ряд следует отнести к малой выборке, и доверительный интервал вычисляется с применением коэффициента Стьюдента .

По ***табл.1.2***принимается доверительная вероятность и тогда

$\alpha_{CT} = 2.11$ при ;

$\alpha_{CT} = 2.12$ при $n = 17$.

Доверительный интервал

$\mu_{CT} = \pm 1.55 \cdot 2.11 = 3.2$ при ;

$\mu_{CT} = \pm 1.25 \cdot 2.12 = 2.7$ при .

Действительное значение измеряемой величины:

$x_Д = 74.8 \pm 3.2$ при ;

$x_Д = 73.8 \pm 2.7$ при .

Относительная погрешность результатов серии измерений:

$$\delta = \frac{3.2}{74.8} \cdot 100\% = 4.3\%$$ при ;

$$\delta = \frac{2.7}{73.8} \cdot 100\% = 3.7\%$$ при .

Таким образом, если принять $x_i = 92$ за грубый промах, то погрешность измерения уменьшается с 4.3% до 3.7% т.е. на 14% .

Если необходимо вычислить минимальное количество измерений при заданной точности, проводят серию опытов, вычисляют , затем с помощью формулы (2.2) определяют .

В рассмотренном случае $\sigma = 6.58; \quad k_B = 8.91\%$.

Пусть задана точность $\Delta = 5\,\%$ и $\Delta = 3\%$ при доверительной вероятности $P_Д = 95\%$ и $\alpha_{CT} = 2.11$.

Тогда

$$N_{\min} = \frac{8.91^2 \cdot 2.11^2}{5^2} = 14$$ при ;

$$N_{\min} = \frac{8.91^2 \cdot 2.11^2}{3^2} = 40$$ при $\Delta = 3\%$.

Таким образом, требование повышения точности измерения (но не выше точности прибора) приводит к значительному увеличению повторяемости опытов.

Выше были рассмотрены общие методы проверки экспериментальных измерений на точность и достоверность.

Ответственные эксперименты должны быть проверены и на воспроизводимость результатов, т.е. на их повторяемость в определенных пределах измерений с заданной| доверительной достоверностью.

Суть такой проверки сводится к следующему.

1.Для каждой серии вычисляется среднеарифметическое значение x_i (- число измерений одной серии, принимаемое обычно равным $3 \ldots 4$).

2.Далее вычисляют дисперсию D_i .

3.Чтобы оценить воспроизводимость, рассчитывают критерий Кохрена (расчетный):

$$k_{KP} = \frac{\max D_i}{\sum_1^m D_i}, \quad 2 \le m \le 4 \quad (2.10)$$

где $\max D_i$ - наибольшее значение дисперсий из числа рассматриваемых

параллельных серий m ;

$\sum_1^m D_i$ - сумма дисперсий серий.

Опыты считаются воспроизводимыми при

$$k_{KP} \le k_{KT}, \quad (2.11)$$

где k_{KT} - табличное значение критерия Кохрена (***табл.2.4***).

Таблица 2.4

Критерий Кохрена при $P_Д = 0.95$

m	$q = n - 1$									
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36
2	0,99	0,97	0,93	0,90	0,87	0,85	0,81	0,78	0,73	0,66
3	0,97	0,93	0,79	0,74	0,70	0,76	0,63	0,60	0,54	0,47
4	0,90	0,76	0,68	0,62	0,59	0,55	0,51	0,48	0,43	0,36
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,50	0,48	0,44	0,41	0,36	0,26
6	0,78	0,61	0,53	0,48	0,44	0,42	0,38	0,35	0,31	0,25
7	0,72	0,56	0,48	0,43	0,39	0,37	0,34	0,31	0,27	0,23
8	0,68	0,51	0,43	0,39	0,36	0,33	0,30	0,28	0,24	0,20
9	0,64	0,47	0,40	0,35	0,33	0,30	0,28	0,25	0,22	0,18
10	0,60	0,44	0,37	0,33	0,30	0,28	0,25	0,23	0,20	0,16
12	0,57	0,39	0,32	0,29	0,26	0,24	0,22	0,20	0,17	0,14
15	0,47	0,33	0,27	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,14	0,11
20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,11	0,08
24	0,34	0,29	0,19	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,09	0,07
30	0,29	0,20	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,07	0,06
40	0,24	0,16	0,12	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06	0,04
60	0,17	0,11	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,02
120	0,09	0,06	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01

Здесь - число серий опытов;

- число измерений в серии;

- число степеней свободы.

Таблица 2.5

Результаты измерений прочности грунта

Серии опытов	Измерение величины в повторности					Вычисленные	
	1	2	3	4	5	$\bar{x}_i$	D_i
1	7	9	6	8	4	6,8	2,96
2	9	7	8	6	5	7,0	2,0
3	8	8	7	9	8	8,0	0,4

Пример

Пусть проведено три серии опытов по измерению прочности грунта (***табл.2.5***).

В каждой серии выполнялось по пять измерений (повторностей).

Тогда по формуле (2.10)

$$k_{КР} = \frac{2.96}{2.96 + 2.0 + 0.4} = 0.55$$.

Вычислим число степеней свободы

$q = n - 1 = 5 - 1 = 4$.

Для $m = 3$ и $q = 4$ согласно ***табл.2.4*** значение критерия Кохрена $k_{KT} = 0.74$.

Так как $k_{KP} < k_{KT}$, то измерения в эксперименте следует считать воспроизводимыми. Если бы оказалось наоборот, т.е. $k_{KP} > k_{KT}$, то необходимо было бы увеличить число серий или число измерений.