№9 тәжірибелік сабағы
Көп айнымалыға байланысты функцияның дербес туындылары. Толық дифференциал. Жанама жазықтық пен нормаль теңдеулері. Күрделі функцияның туындысы.

Мысал1. $z = \arccos\frac{x}{x+y}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

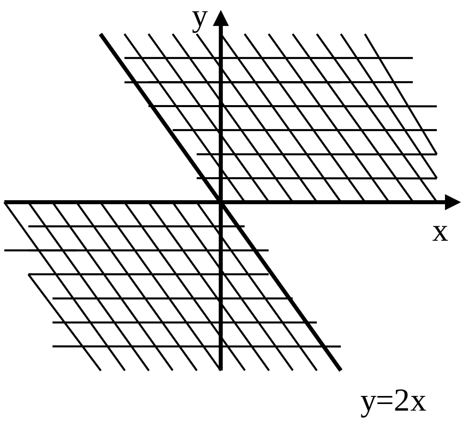
Функциясының анықталу облысы: $\left|\frac{x}{x+y}\right| \le 1$, $y \ne -x$, яғни, $|x| \le |x+y|$, $y \ne -x$. Соңғы теңсіздіктің екі жағын квадраттап, $x^2 \le x^2 + 2xy + y^2$ немесе $2xy + y^2 \ge 0$ теңсіздігін аламыз. Оны ықшамдай келе, $\begin{cases} y(2x+y) \ge 0 \\ y \ne -x \end{cases}$ жүйесіндегі 1-ші теңсіздіктен екі жағдайдың болатынын ескерсек, онда

$$\begin{cases} y \ge 0, \\ 2x + y \ge 0, \\ y \ne -x. \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} y \le 0, \\ 2x + y \le 0, \\ y \ne -x. \end{cases}$$

жүйелеріне келеміз. Сонымен, z функциясының анықталу облысын

$$D = \left\{ (x,y) \in R_2 : (x,y) \ne (0,0), \begin{cases} y \ge 0, \\ 2x + y \ge 0, \end{cases} \text{немесе} \begin{cases} y \le 0, \\ 2x + y \le 0. \end{cases} \right\}.$$

түрінде беруге болады.



1-сурет

D облысының геометриялық кесіні $y = 0, y = -2x$ түзулерімен шектелген $(0,0)$ нүктесі енбейтін екі доғал вертикаль бұрыштардан тұрады. (сур.1)**.**

Мысал 2. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ функциясының анықталу оьлысын табыңыз. R – оң сан.

z функциясы $R^2 - x^2 - y^2 \ge 0$ нақты мәндерді қабылдайды. Теңсіздікті *x, y* –ке қатысты шешіп, $x^2 + y^2 \le R^2$ теңсіздігін аламыз. Сонымен, анықталу облысы центрі $(0,0)$ нүктесінде, радиусы R-ге тең шеңбермен шектелген дөңгелекті береді: $D = \{(x,y) \in R_2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Мысал 4. $u = xy^2z^3$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табыңыз.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2x^3\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3\,, \quad u'_z = 3xy^2z^2\,.$$

Мысал 5. $z = arctg\frac{y}{x}$. функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табыңыз.

y-ті тұрақты деп қарастырып,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

туындысын аламыз. Енді x-ті тұрақты деп қарастырып,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x\left(1+(y/x)^2\right)} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

туындысын аламыз.

Мысал 6. $u = xy^2z^3$ функциясының du толық дифференциалын табыңыз.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$$

Мысал 7. $\sqrt{(3{,}002)^2 + (3{,}95)^2}$ жуықтап есептеңіз:

Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану формуласынан $x_0 = 3, \quad y_0 = 4, \quad x_0 + \Delta x = 3{,}002, \quad y_0 + \Delta y = 3{,}95$ шамаларын анықтаймыз. Онда $z = \sqrt{x^2+y^2}$ функциясы үшін $f(x_0, y_0) = f(3;\,4) = 5, \quad \Delta x = 0{,}002\,, \quad \Delta y = -0{,}05\,,$

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f(3;4)}{\partial x} = \frac{3}{5}\,, \quad \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f(3;4)}{\partial y} = \frac{4}{5}.$$

$$\sqrt{(3{,}002)^2 + (3{,}95)^2} \approx 5 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}002 + \frac{4}{5}\cdot(-0{,}05) = 4{,}9612.$$

Мысал 8. а) $x^2y^3 - \cos y = 0$ жабық функциясының туындысын табыңыз.

Формуламен есептейміз: $F'_x = 2xy^3\,, \quad F'_y = 3x^2y^2 + \sin y \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2 + \sin y}$

б) $x^2y - e^{xz} = 0$ жабық функциясының туындысын табыңыз.

Формуламен есептейміз:

$$F'_x = 2xy - e^{xz}z\,, \quad F'_y = x^2\,, \quad F'_z = -e^{xz}x \Rightarrow z'_x = \frac{2xy - e^{xz}z}{xe^{xz}}; \quad z'_y = \frac{x}{e^{xz}}$$

Мысал 9. Егер $z = u/v$, мұндағы $u = e^{x+y}$, $v = \ln(xy)$, күрделі функциясы берілсе, онда оның дербес туындыларын табыңыз.

Күрделі функциядан туынды алу формуласына қолданып,

$$z'_x = \left(\frac{u}{v}\right)'_u \left(e^{x+y}\right)'_x + \left(\frac{u}{v}\right)'_v \left(\ln(xy)\right)'_x = \frac{1}{v}e^{x+y} - \frac{u}{v^2}\frac{y}{xy} = |u$$ және v

функцияларының мәндерін қойып| = $\dfrac{e^{x+y}}{\ln(xy)} - \dfrac{e^{x+y}}{x(\ln(xy))^2}$ нәтижесін аламыз. Сол

сияқты

$$z'_y = \left(\frac{u}{v}\right)'_u \left(e^{x+y}\right)'_y + \left(\frac{u}{v}\right)'_v \left(\ln(xy)\right)'_y = \frac{1}{v}e^{x+y} - \frac{u}{v^2}\frac{1}{y} = \frac{e^{x+y}}{\ln(xy)} - \frac{e^{x+y}}{y(\ln(xy))^2}.$$

№10 тәжірибелік сабағы

Бағыт бойынша туынды және градиент. Көп айнымалыға байланысты функцияның жоғарғы ретті дербес туындылары мен дифференциалдары. Локальді экстремум ұғымы.

Мысал 10. $z = e^{xy} + x$. функциясының 2-ретті дербес туындыларын табыңыз.

$$z'_x = e^{xy}y + 1, \quad z'_y = e^{xy}x, \quad z''_{yx} = e^{xy} + e^{xy}yx, \; z''_{xy} = e^{xy} + yxe^{xy} \Rightarrow z''_{yx} = z''_{xy}$$

Мысал 11. $z = x^2 + y^2$ теңдеуімен берілген эллипстік параболоидтің бетіне $\mathrm{M}_0(1,1,2)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық пен нормальдің теңдеуін табыңыз.

Теңдеуді $z - x^2 - y^2 = 0$ түрінде жазып, $u(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ функциясын аламыз. 1-ретті дербес туындыларын тауып, $u'_x = -2x$, $u'_y = -2y$, $u'_z = 1$ сәйкес $\mathrm{M}_0(1,1,2)$ нүктесіндегі мәндерін анықтаймыз: $u'_x(M_0) = -2$, $u'_y(M_0) = -2$, $u'_z(M_0) = 1$. Жанама жазықтық теңдеуіне қойып,

$-2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$, яғни, $-2x - 2y + z + 2 = 0$ аламыз.

Нормальдің параметрлік теңдеуінің түрі $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ теңдеуімен анықталады.

Мысал 12. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, \; y_2 = 1, \; x_2 = 0, \; y_2 = 0.$$

$M_1(1;1)$, $M_2(0;0)$ экстремумға зерттелетін екі нүкте алдық.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$

1. $M_1(1;1)$ нүктесі үшін жеткілікті шартты тексереміз:

$A = 6$; $B = -3$; $C = 6 \Rightarrow \Delta = 27 > 0$, $A = 6 > 0$ мәндерінен z функциясының $M_1(1;1)$ нүктесінде минимумы бар болатынын көруге болады.

2. $M_2(0;0)$ нүктесі үшін жеткілікті шартты тексереміз: $A = 0$; $B = -3$; $C = 0 \Rightarrow \Delta = -9 < 0$ мәндерінен z функциясының M_2 нүктесінде экстремумы болмайтынын көруге болады.

№11 тәжірибелік сабағы

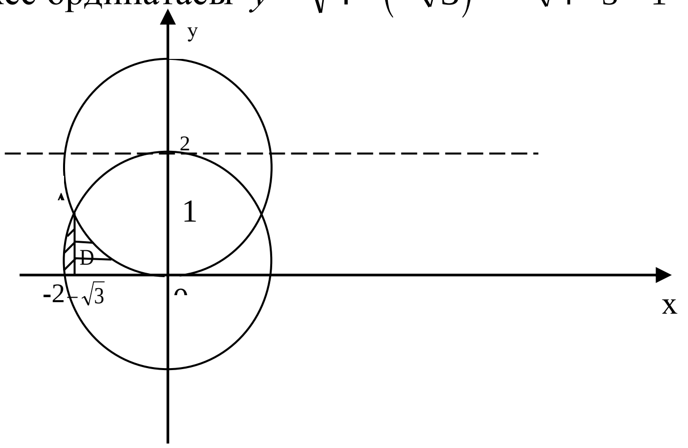
Еселі интегралдар, қасиеттері және оларды есептеу жолдары. Еселі интегралдарда ауыстыру енгізу.

Есеп. Интегралдау ретін өзгертіңіз.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

Шешуі. Облыстың шекараларының теңдеулерін жазып алайық.. $x = -2$, $x = -\sqrt{3}$ - Оу осіне параллель түзулер. x=0 - Оу осінің теңдеуі .y=0 - Ох осінің теңдеуі. $y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ - центрі (0;0) нүктесінде, радиусы R=2 болатын шеңбердің теңдеуі. Ал $y = \sqrt{4-x^2}$ - шеңбердің Ох осінен жоғарғы орналасқан бөлігі.

$y = 2 - \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y - 2 = -\sqrt{4-x^2} \Rightarrow (y-2)^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$ - центрі (0,2) нүктесінде, радиусы R=2 болатын шеңбердің теңдеуі. $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$ - y=2 түзуінен төмен орналасқан бөлігі. Берілген шеңберлердің қиылысу нүктесі. Берілген шеңберлердің 2- ші ширекте жатқан қиылысу нүктесінің абсциссасы $x = -\sqrt{3}$-ке тең, сәйкес ординатасы $y = \sqrt{4 - (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-3} = 1$ $A = \left(-\sqrt{3},\ 1\right)$.



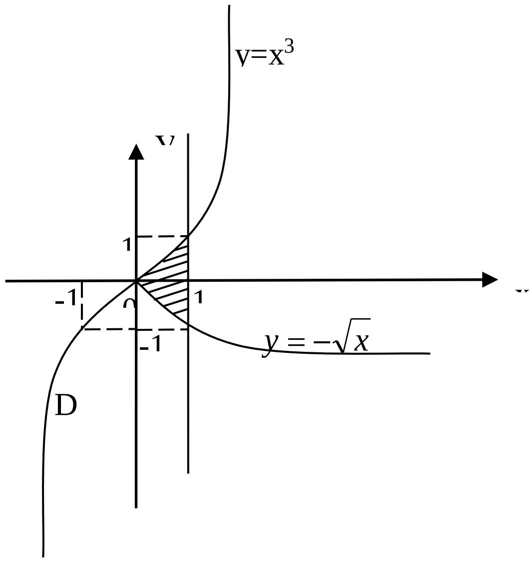
Шеңберлердің теңдеулерінен x айнымалысын y айнымалысы арқылы өрнектеп, аламыз: $x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2=4-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$ $x=-\sqrt{4-y^2}$, өйткені, облыс 2-ширекте орналасқан. $x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow x^2=$ $=4-(y-2)^2 \Rightarrow x^2=4-y^2+4y-4 \Rightarrow x^2=4y-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4y-y^2} \Rightarrow$ $x=-\sqrt{4y-y^2}$, өйткені, облыс 2-ширекте орналасқан.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dy$$

Жауабы: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx \cdot$

Есеп. Есептеңіз: $\iint_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$ $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$

Шешуі. D облысының шекарасын беретін теңдеулерден облысты салайық.



3-сурет

$D:\{0 \le x \le 1;\ -\sqrt{x} \le y \le x^3\}$ теңсіздіктермен көрсетілген D облысы бойынша қайталанған интегралға келтіріп, есептейміз:

$$\iint_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(54x^2\frac{y^3}{3}+150x^4\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3} dx = \int_0^1 \left[18x^2x^9+30x^4x^{15}-\left(-18x^2x^{\frac{3}{2}}-30x^4x^{\frac{5}{2}}\right)\right]dx =$$

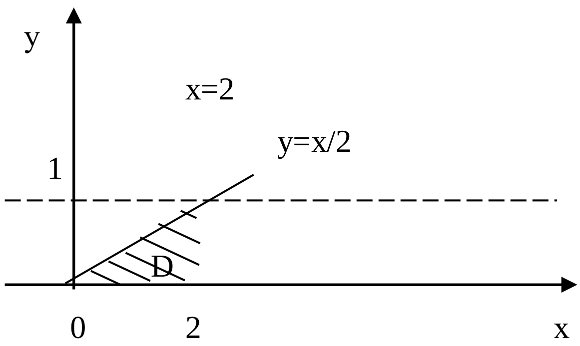
$$=\int_0^1\left(18x^{11}+30x^{19}+18x^{\frac{7}{2}}+30x^{\frac{13}{2}}\right)dx=\left.\left(\frac{18x^{12}}{12}+\frac{30x^{20}}{20}+\frac{18x^{\frac{9}{2}}\cdot 2}{9}+\frac{30x^{\frac{15}{2}}\cdot 2}{15}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+4+4=11$$

Жауабы: $\iint\limits_D\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=11$.

Есеп. Есептеңіз: $\iiint\limits_V x^2 sh(xy)dxdydz$. V: x=2, $y=\frac{x}{2}$, y=0, z=0, z=1.

Шешуі. V денесі призма формасындағы бес жазықтықпен шектелген дене болады. Үш еселі интегралды Oxy жазықтығындағы проекциясы бойынша қайталанған интегралға келтіріп, есептейміз.



5-сурет

$$\iiint\limits_V x^2 shxydxdydz=\int_0^2 x^2dx\int_0^{\frac{x}{2}} shxydy\int_0^1 dz=\int_0^2 x^2dx\int_0^{\frac{x}{2}} shxy\left.\ z\right|_0^1 dy=$$

$$=\int_0^2 x^2dx\int_0^{\frac{x}{2}} shxydy=\int_0^2 x^2\left.\frac{chxy}{x}\right|_0^{\frac{x}{2}}dx=\int_0^2 x\left(ch\frac{x^2}{2}-ch0\right)dx=\int_0^2 x\left(ch\frac{x^2}{2}-1\right)dx=$$

$$=\int_0^2 xch\frac{x^2}{2}dx-\int_0^2 xdx=\int_0^2 ch\frac{x^2}{2}d\frac{x^2}{2}-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\left.sh\frac{x^2}{2}\right|_0^2-2=sh2-sh0-2=sh2-2.$$

Жауабы: $\iiint\limits_V x^2 sh(xy)dxdydz=sh2-2$.