6 ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

6.1 Теориялық бөлім

6.1.1 I-түрдегі қисық сызықты интеграл

OXY жазықтығында AB түзетілетін тұйық емес қисығы берілген. AB қисығында анықталған үзіліссіз $z = f(x,y)$ функциясы берілген. AB қисығын ұзындығы Δl_i болатын n бөлікке бөлеміз. Әрбір бөліктен $M_i(\xi_i;\eta_i)$ нүктесін таңдап алып, интегралдық қосынды құрамыз

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i \qquad (1)$$

Анықтама. Бөліктердің диаметрінің үлкені нольге ұмтылғанда, интегралдық қосындыдан шек алатын болсақ, ол шек AB қисығы бойынша $z = f(x,y)$ функциясынан алынған қисық сызықты интегралды береді

$$\int_{AB} f(x,y)dl \text{, яғни } \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \int f(x,y)dl \qquad (2).$$

Қисық сызықты интегралдардың қасиеттері

1. $\int_{AB} f(x,y)dl = -\int_{BA} f(x,y)dl$

Қисық сызықты интегралдың қалған барлық қасиеттері анықталған интегралдың қасиеттерімен сәйкес келеді.

Геометриялық мағынасы

I-түрдегі қисық сызықты интегралдың сандық мәні биіктігі $z = f(x,y)$ функциясымен анықталатын, төменнен AB қисығымен шектелген және $M(x,y)$ нүктесінде тұрғызылған перпендикулярдан тұратын қисық сызықты цилиндрдің ауданын береді.

Егер $f(x,y)=1$ болса, AB қисығының ұзындығы $L = \int_{Ab} dl$ арқылы анықталады.

I-түрдегі қисық сызықты интегралдарды есептеу

Анықталған интегралдарды есептеуге келтіріледі.

1. AB қисығы кеңістікте параметрлік түрде берілсе

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

$\alpha \le t \le \beta$

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t);z(t)\right)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t)^2 + (z_t)^2}\,dt$$

2. AB қисығы жазықтықта параметрлік түрде берілсе

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$\alpha \le t \le \beta$

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t)\right)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t)^2}\,dt$$

3. AB қисығы декарттық координата жазықтығында y функциясы арқылы берілген $y = y(x), a \le x \le b$

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$$

4. AB қисығы полярлық координатада $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$ арқылы берілген

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi; \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi.$$

6.1.2 ІІ-түрдегі қисық сызықты интегралдар

AB қисығында $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары анықталсын. AB қисығын n бөлікке бөліп, Δx_i және Δy_i арқылы доғалардың координата осьтеріне проекцияларын белгілеп, қосынды құрамыз

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i; y_i)\Delta y_i \tag{1}$$

Егер $\lambda = \max\{\Delta l_i\} = 0$ орындалғанда (1) интегралдық қосындысының шегі бар болса, онда ол ІІ-түрдегі қисық сызықты интеграл деп аталады және төмендегідей бейнеледі

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Егер L - тұйық контур болса (B нүктесі A нүктесімен беттеседі), онда контур бойынша оң бағыт деп осы контурмен қоршалған облыс контурдың сол жағында қалатын бағытты айтамыз және ол төмендегідей қисық сызықты интегралмен беріледі

$$\oint_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Қасиеті.

1. $\int_{Ab} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

ІІ-түрдегі қисық сызықты интегралды есептеу

1. AB қиысығы декарт координатасында $y = y(x), a \le x \le b$ теңдеуімен берілген

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)]dx$$

2. AB қисығы $x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$ параметрлік түрде берілсе, онда AB бойынша қиысық сызықты интеграл

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t); y(t)) \cdot x'_t + Q(x(t); y(t)) \cdot y'_t]dt$$

Грин формуласы (Екі еселі интегралды қисық сызықты интегралмен байланыстыратын формула)

Теорема. G - L тұйық контурымен шектелген облысында анықталған үзіліссіз $P(x,y), Q(x,y)$ функцияларының дербес туындылары да үзіліссіз болса, онда төмендегі формула орынды болады

$$\iint_G \left(\frac{DQ}{Dx} - \frac{DP}{Dy}\right)dxdy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$ - Грин формуласы.

II-түрдегі қисық сызықты интегралды қолдану

1. Ауданды есептеу.

L тұйық контурымен қоршалған G облысының ауданы келесі формула арқылы есептеледі

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

2. Күштің жұмысын есептеу.

L қисығының бойымен материалдық нүктенің қозғалысы бойынша $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ күшінің A жұмысы төмендегі формуламен анықталады

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

6.2 Өз білімін тексеруге арналған сұрақтар

1.1-түрдегі қисық сызықты интегралдар ұғымы.
2.1-түрдегі қисық сызықты интегралдардың қасиеттері.
3.2-түрдегі қисық сызықты интегралдар ұғымы.
4.2-түрдегі қисық сызықты интегралдардың қасиеттері.
5.Қисық сызықты интегралдарды есептеу жолдары.
6.Грин формуласы.

6.3 Есеп шығару үлгілері

Есеп №1. Екі еселі интегралды есептеңіз.

$$G = \{(x, y) / y = x^2 + 4, y = -x^2 + 4, x = 2\}$$

$$\iint_G xydxdy = \int_0^2 dx \int_{-x^2+4}^{x^2+4} xydy = \int_0^2 dx\left[x \cdot \int_{-x^2+4}^{x^2+4} ydy\right] = \int_0^2 dx\left[x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{-x^2+4}^{x^2+4}\right] = \int_0^2 dx\left[\frac{x}{2}\left(\left(x^2+4\right)^2 - \left(-x^2+4\right)^2\right)\right] =$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2}\left(\left(x^4 + 8x^2 + 16\right) - \left(x^4 - 8x^2 + 16\right)\right)dx = 8\int_0^2 x^3 dx = 32$$

Есеп №2. Қисық сызықты интегралды есептеңіз.

$\int_{AB} ydl$, $AB : y^2 = 2x$, $A(0;0), B(2;2)$.

$$\int_{AB} ydl = \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ dl = \sqrt{1 + \left(y_x'\right)^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)^2}dx = \sqrt{\frac{2x+1}{2x}}dx \end{array} \right| =$$

$$\int_0^2 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{2x+1}d(2x+1) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{5\sqrt{5}-1}{3}$$

Есеп №3. $\int_{AB} y^2 dl$, AB - шеңбердің бөліг

$x = a\cos t$

$y = a\sin t$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_{AB} y^2 dl = \begin{vmatrix} 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = adt \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 tadt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2td(2t) = \frac{a^3\pi}{4}$$

Есеп №4. Қисық сызықты интегралды есептеңіз.

$\int_{AB} 3x^2 ydx + (x^3+1)dy,\ AB: y = x^2,\ A(0,0),\ B(1,1)$

$y_x' = 2x$

$$\int_{AB} 3x^2 ydx + (x^3+1)dy = \int_0^1 \left(3x^2x^2 + (x^3+1)2x\right)dx = \int_0^1 \left(3x^4 + 2x^4 + 2x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 5x^4 dx + \int_0^1 2xdx = x^5 \Big|_0^1 + x^2 \Big|_0^1 = 1 + 1 = 2$$

Есеп №5. Тұйық контур бойынша интегралды есептеңіз.

$\oint_L (x+y)dy$, мұндағы L - $x=0, y=0, x=1, y=1$ түзулерімен жасалған контур.

$$\oint_L = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CO}$$

$$\int_{OA} (x+y)dy = \begin{vmatrix} 0 \le x \le 1 \\ y = 0 \\ dy = 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\int_{AB} (x+y)dy = \begin{vmatrix} x = 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 (1+y)dy = \int_0^1 dy + \int_0^1 ydy = y\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{BC} (x+y)dy = \begin{vmatrix} 0 \le x \le 1 \\ y = 0 \\ dy = 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\int_{CO} (x+y)dy = \begin{vmatrix} x = 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{vmatrix} = \int_1^0 ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_1^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\oint_L \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Есеп №6. Грин формуласын қолданып, L тұйық контуры бойынша интегралды есептеңіз.

$\oint_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, мұндағы $L: y = \sin x, 0 \le x \le \pi$

$$P(x,y) = (x+y)^2$$
$$Q(x,y) = -(x-y)^2$$
$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{DQ}{Dx} - \frac{DP}{Dy} \right) dxdy$$
$$\frac{DP}{Dy} = 2(x+y)$$
$$\frac{DQ}{Dx} = -2(x-y)$$
$$\oint\limits_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \iint\limits_G [-2(x-y) - 2(x+y)] dxdy = \iint\limits_G (-2x + 2y - 2x - 2y) dxdy =$$
$$= \iint\limits_G (-4x) dxdy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} (-4x) dy = -4\int\limits_0^{\pi} x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{vmatrix} = -4\left(-x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x dx \right) =$$
$$= -4\left(\pi + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = -4\pi$$

Есеп №7. $x^2 = y, A(0;0), B(1;1)$ парабола бойымен материалдық нүктенің орын ауыстыруы бойынша $F(x,y) = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ күш өрісінің жұмысын есептеңіздер.

$$A = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L 2xydx + y^2 dy = \begin{vmatrix} y = x^2 \\ dy = 2xdx \\ 0 \le x \le 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \int\limits_0^1 2xx^2 dx + \int\limits_0^1 x^4 2xdx = 2\int\limits_0^1 x^3 dx + 2\int\limits_0^1 x^5 dx = 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + 2\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$