ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 629.069:330.4

А.Т. Кайназарова
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

ВОЗДЕЙСТВИЕ ОБЪЕМА РАЗОВОЙ ПОСТАВКИ НА ВЕЛИЧИНУ СУММАРНЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ ПЕРЕВОЗОЧНОГО ПРОЦЕССА

Ключевая роль транспортировки в логистике объясняется не только большим удельным весом транспортных расходов в общем составе логистических издержек, но и тем, что без транспортировки невозможно само существование материального потока. Задача выбора способа транспортного обеспечения решается на основе критериев, которые являются приоритетными для владельца груза. Наиболее часто способы транспортного обеспечения логистических задач оценивают по следующим критериям:

- минимум затрат на перевозку (минимальная себестоимость перевозки или минимальные тарифы на транспортные услуги);
- минимум времени груза в пути (минимальное время доставки);
- минимум риска несвоевременной доставки (надежность перевозки);
- минимум потерь груза при перевозке (сохранность товара);
- готовность к перевозке в любой произвольный момент времени и возможность обеспечения перевозок в различных условиях;
- максимум провозной способности транспорта (возможность перевезти требуемые объемы груза).

Ключевыми факторами, определяющими эффективность перевозочного процесса, являются стоимость перевозки, мобильность, скорость доставки и максимум провозной способности транспорта. Но для построения формальной методики, определяющей оптимальный способ организации процесса перемещения, следует выявить факторы, воздействующие на перевозочный процесс.

На перевозочный процесс предприятия оказывают влияние три основных фактора:

- суммарная величина логистических затрат перевозочного процесса (SI);
- временной фактор (система «заказ – потребление»);
- величина доходов, получение которых связано с перевозочным процессом (I).

Суммарная величина логистических затрат формируется из стоимости материального потока и величины транспортных затрат:

$$SI = RI + C_{log}. \qquad (1)$$

Формирующее воздействие на величину суммарных логистических затрат перевозочного процесса оказывает определение объема разовой поставки, на которую, в свою очередь, оказывает влияние срок действия проекта, объемы внешнего материального потока, стандартные условия грузоперевозок со стороны действующих агентов транспортного рынка. Так, например, каждый вид транспорта предлагает грузоотправителю ряд грузовых единиц (паллет, пакет, контейнер, вагон, маршрут, чартер и т. д.), что в совокупности, с учетом скорости потребления данного материального потока, определяет объем разовой поставки. Как правило, поставщик поставляет не одно изделие, исходя из этого рассчитать стоимость материального потока можно по следующей формуле:

$$RI = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot k_i \right) \cdot f, \tag{2}$$

где P_i – цена единицы изделия i-го вида;

k_i – количество изделий i-го вида в поставке;

f – коэффициент числа опережающих поставок.

При условии выполнения следующих ограничений (рис. 1):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot k_i \le G_{ts}, \\ \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot k_i \le V_{ts}, \end{cases} \tag{3}$$

где m_i, v_i – масса и объем единицы материального потока i-го вида;

G_{ts}, V_{ts} – масса и внутренний объем транспортного средства, выполняющего транспортировку материального потока.

При условии допущения, что спрос – процесс непрерывный и постоянный, предприятию необходимо организовать свою деятельность таким образом, чтобы полностью покрыть потребности в элементах данного материального потока.

Подобные действия выражаются в некотором количестве опережающих поставок, что приводит к увеличению стоимости материального потока (величина постоянно отвлеченных оборотных средств). Число опережающих поставок прямо пропорционально зависит от времени нахождения груза в пути (DIW) и обратно пропорционально - от времени реализации (T_{real}) доставленного материального потока (рис. 2).

Величину коэффициента числа опережающих поставок определяют два случая:

1) если время нахождения груза в пути меньше либо равно времени потребления ($DIW \le T_{real}$), коэффициент числа опережающих поставок примем равным двум (f=2), так как, чтобы обеспечить удовлетворение непрерывного процесса потребления материального потока, предприятие вынуждено осуществить следующий заказ и транспортировку ранее момента полного использования доставленного материального потока;

2) если время нахождения груза в пути больше времени потребления внешнего материального потока ($DIW > T_{real}$), коэффициент числа опережающих поставок определяется по формуле:

$$f = ceil\left(\frac{DIW}{T_{real}} \right) + 1 \cdot \tag{4}$$

Применение коэффициента f, рассчитанного по формуле, позволяет учитывать временной параметр перевозочного процесса – время, затрачиваемое на перемещение материального потока, и время, необходимое для его дальнейшего использования.

Время нахождения материального потока в пути также оказывает корректирующее воздействие на величину дохода (I):

$$I = \frac{Q_p \cdot \left(T_{prg} - DIW \right)}{T_{prg}}, \tag{5}$$

где Q_p – объем реализации потенциальный;
T_{prg} – срок действия проекта.

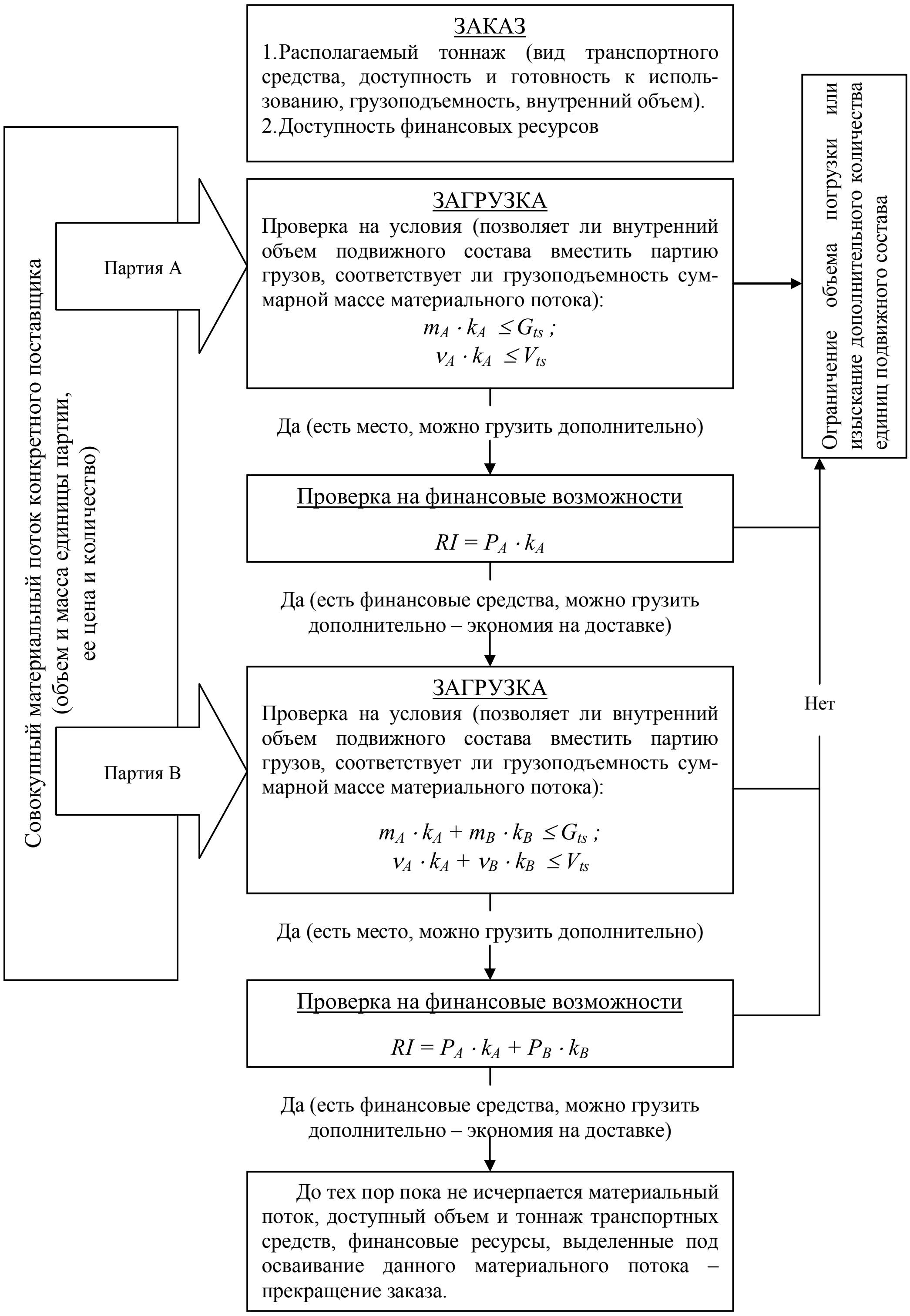
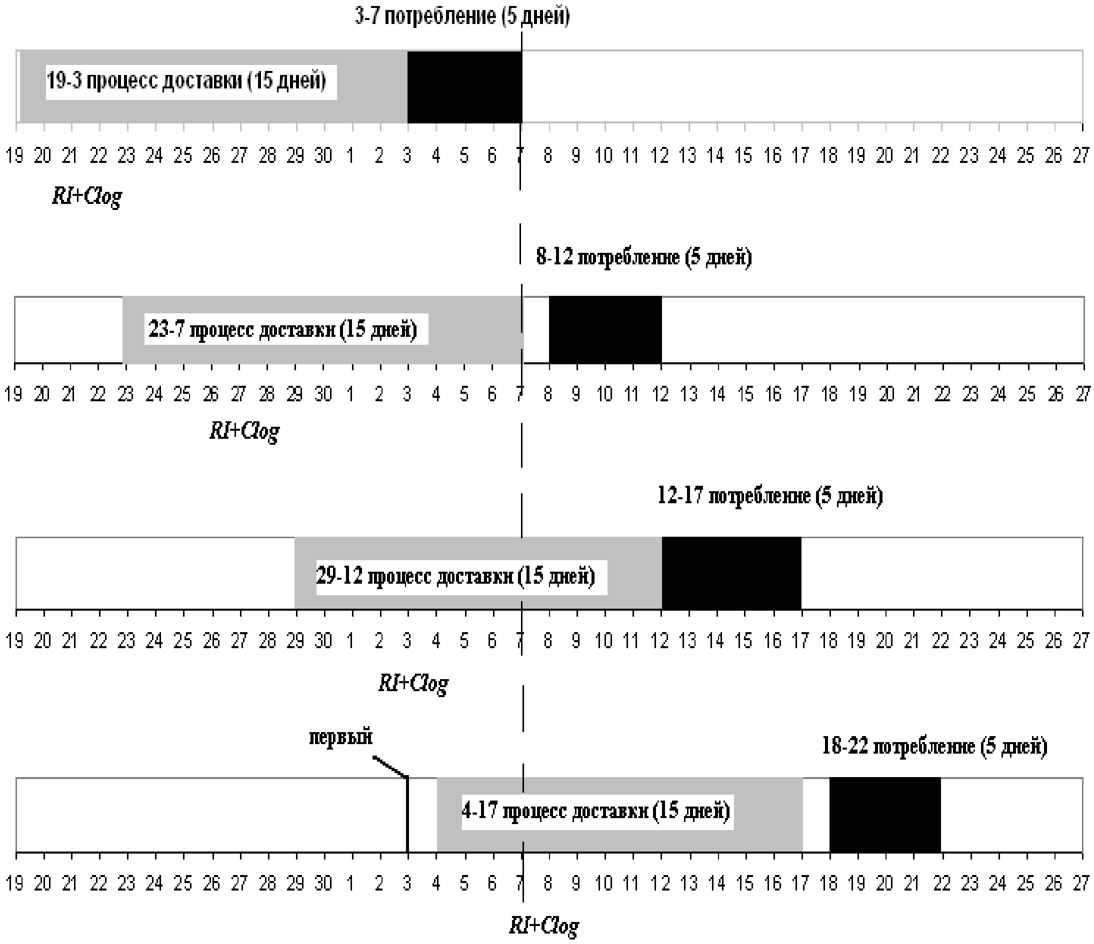


Рисунок 1 – Процесс формирования дискретной стоимости материального потока в зависимости от располагаемого тоннажа предприятия

Отчетливо проявляется зависимость роста показателя стоимости материального потока от роста таких показателей, как грузоподъемность применяемого транспортного средства, ступенчатый рост в зависимости от увеличения времени нахождения материального потока в пути. С увеличением срока потребления стоимость потока сокращается до определенного уровня, который в дальнейшем остается постоянным ($DIW \leq T_{real}, f = 2$).



Количество реализованных перевозочных процессов, необходимых для обеспечения непрерывного процесса потребления

Рисунок 2 – Формирование числа опережающих поставок в целях обеспечения бесперебойного снабжения

С ростом массы грузовой единицы стоимость материального потока постоянно снижается – меньшее количество размещается на анализируемом транспортном средстве (рис. 3).

При осуществлении пространственного перемещения внешнего материального потока логистическими посредниками величина транспортных затрат определяется на основании счетов, представленных к оплате данными организациями.

В общем виде эту величину можно рассчитать по следующей формуле:

$$C_{log} = tariff \cdot Z, \tag{6}$$

где *tariff* – тариф на анализируемую перевозку соответствующим видом транспорта;

Z – количество рейсов, выполнение которых необходимо для полного удовлетворения объема спроса.

Рисунок 3 – Изменение стоимости материального потока (*SI*) под влиянием роста факторов – грузоподъемности, массы грузовой единицы, времени перемещения и срока потребления

Показатель количества рейсов, выполнение которых необходимо для полного удовлетворения объема спроса, используется для приведения величины суммы транспортных затрат в зависимости от вида транспорта, объема перевозок и скорости их доставки (время нахождения материального потока в пути). Дифференцируется в зависимости от величины объема реализации (V_{real}) и стоимости разовой поставки (RI):

- если объемы потребления (реализации) меньше либо равны величине стоимости разовой поставки ($V_{real} \le RI$), то количество рейсов принимаем равной единице ($Z = 1$);

- если объемы потребления (реализации) больше величины стоимости разовой поставки ($V_{real} > RI$), тогда количество рейсов определяется по формуле:

$$Z = ceil\left(\frac{V_{real} \cdot f}{RI}\right). \tag{7}$$

Как видно из рис. 4 рост величины транспортных затрат обуславливается увеличением тарифа на анализируемую перевозку, при увеличении которого на 100 % транспортные затраты удвоятся. Под влиянием увеличения объемов реализации в денежном эквиваленте транспортные затраты увеличиваются ступенчато. Это объясняется тем, что предприятие увеличивает количество рейсов на данном направлении перемещения внешнего материального потока, удовлетворяя спрос полностью. Рост величины стоимости груза разовой поставки напротив снижает транспортные затраты – чем больший объем материального потока будет перемещен за рейс, тем меньше будет число рейсов.

Рисунок 4 – Изменение транспортных затрат (C_{log}) под влиянием роста факторов – тарифов, объемов реализации и разовой стоимости груза

Таким образом, к параметрам перевозочного процесса можно отнести следующие: стоимость материального потока; транспортные издержки; время, затрачиваемое на потребление перемещенного материального потока; ставка внутренней рентабельности; объем разовой поставки. Процесс определения объема разовой поставки может быть основан на переборе возможных вариантов либо экспертным путем. На основании вышеперечисленных параметров перевозочного процесса представляется возможным провести оценку целесообразности применения в конкретном перевозочном процессе того или иного вида транспорта, или обосновать выбор поставщика транспортных услуг.

Список литературы

1. Карсыбаев Е.Е. Принятие решений при логистической системе управления перевозочным процессом в цепи поставок грузов / Е.Е.Карсыбаев, О.М.Карибжанов, Г.С.Нусупбекова, А.Б.Жумабаев // Транспорт Евразии: взгляд в XXI век: Материалы II Междунар. науч.-практ. конф. - Алматы, 2002. - Т. 5 (Ч. II). - С. 15-23.
2. Новиков О.А. Коммерческая логистика: Учеб. пособие / О.А.Новиков, С.А.Уваров.- СПб: СПбУЭиФ, 1995. - 110 с.
3. Лаврова О.В. Логистические методы организации и планирования материальных потоков на машиностроительном предприятии: Дис. ... канд. экон. наук. - Саратов, 1974. - 179 с.
4. Транспортное обеспечение коммерческой деятельности.
5. Сатова Р.К. Эффективность логистической деятельности на железнодорожном транспорте / Р.К.Сатова, А.Ш.Шабанов // Магистраль. - 2003. - № 7. - С.96-100.
6. Карсыбаев Е.Е. Значение и роль логистики в вопросах управления деятельностью предприятий транспорта // Поиск. - 2004. - № 3(2). - С.22-25.

Получено 16.07.08

УДК 65.012.122

Г.М. Мутанов
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск
И.Г. Курмашев
Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, г. Петропавловск

ФИНАНСОВО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОПЕРАЦИЕЙ ПО СБАЛАНСИРОВАННОСТИ КУРСОВ ВАЛЮТ

Предполагаемая математическая модель сбалансированности курсов валют представляет собой пример финансово-математической модели, применение которой в практической деятельности банков и других финансовых структур позволит принимать взвешенные, обоснованные решения.

В настоящее время банки располагают возможностью выбора широкого круга альтернативных финансовых, кредитных и коммерческих проектов. Очевидно, что широкий круг факторов, неоднозначно влияющих на финансовые результаты банковской деятельности, практически невозможно учесть с помощью элементарных расчетов и интуитивных соображений. Это определяет актуальность разработки математического, модельного и программного инструментария, обеспечивающего отсечение неэффективных и выбор рациональных вариантов.

Курсы валют назовем сбалансированными, если исключена возможность получения спекулятивной прибыли на замкнутых последовательностях операций обмена валют. В случае несбалансированности возникает задача определения последовательностей операций, приводящих к получению спекулятивной прибыли.

Разрабатывается математическая модель операций купли и продажи валют, которая одновременно учитывает ограничения и условия, возникающие при проведении операций с валютой, и формулируется задача о сбалансированности. Критерием модели является определение банком сбалансированного курса валют. Модель предполагает возможность проведения расчетов в имитационном режиме, что позволяет менять условия и параметры при различных предположениях о состоянии денежного и валютного рынков.

Построение математической модели.

Пусть n - число видов валют. Каждому виду поставим в соответствие вершину ориентированного графа $G=(N, E)$, $N=\{1,\dots,n\}$. Каждой дуге $(i, j)\in E$ поставим в соответствие положительное число $\alpha(i, j)$ – коэффициент перевода валюты вида i в валюту вида j. Разность в курсах покупки и продажи учитывается неравенством $\alpha(i, j)\cdot\alpha(j, i)<1$, $i \neq j$ (комиссионные сборы). Будем предполагать, что граф G содержит все дуги, а также петли, то есть $(i, i)\in E$, при этом $\alpha(i, i)=1$, $i=1,\dots, n$.

Контур $K = ((i_1, i_2),(i_2, i_3), \dots, (i_p, i_1))$ определяет последовательность операций по купле (обмену) валют. Обозначим: $| K | = p$ – число дуг в контуре;

$$a(K)=a(i_1, i_2)\cdot\ldots\cdot a(i_p, i_1). \qquad (1)$$

Контур K назовём прибыльным, если $\alpha(K)>1$. Прибыльный контур определяет последовательность операций, приводящих к спекулятивной прибыли.

Граф G назовём сбалансированным, если в нём не существует прибыльных контуров. Сбалансированный граф соответствует сбалансированному курсу валют.

Заметим, что если K – прибыльный контур, то $|K| \geq 3$.

Рассматриваемой модели присуща важная особенность. Это контур в формируемом орграфе, который обеспечивает моделирование обратной связи. Обратная связь является важнейшим элементом любой сложной экономической системы. Есть контуры, которые усиливают тенденцию к отклонению от начального состояния. Такие контуры называют контурами положительной обратной связи. Контуры, которые подавляют тенденцию к отклонению от начального состояния, называют контурами отрицательной обратной связи.

Контур модели является контуром положительной обратной связи, если содержит четное число дуг со знаком минус. В противном случае он является контуром отрицательной обратной связи.

Наличие в модели многих контуров, усиливающих отклонение, предполагает неустойчивость. В то же время наличие многих контуров, противодействующих отклонению, также может приводить к неустойчивости другого рода, которая проявляется в форме колебаний с увеличивающейся амплитудой. Если колебания показателей затухают и система приходит в определенное состояние, характеризующееся определенным уровнем показателей, то данная система устойчива.

Постановка и решение задачи о сбалансированности курсов валют.

Задачу о сбалансированности курсов валют сформулируем следующим образом. Для заданного графа $G=(N, E)$ и заданных чисел $\alpha(i, j)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, необходимо определить, является ли граф G сбалансированным; в случае, если граф G не сбалансирован, необходимо найти хотя бы один прибыльный контур.

Общая задача состоит в том, чтобы найти все прибыльные контуры (контуры для которого $\alpha(K)>1$) [1].

Один из методов решения данной задачи - сведение задачи о сбалансированности курсов валют к задаче о назначениях.

Для этого коэффициенты перевода заменены их логарифмами, которые названы длинами (или весами) дуг. И тогда данная задача сводится к определению контуров с положительными длинами. Положим $\beta(i, j)=lg\alpha(i, j)$, $\beta(K)=lg\alpha(K)$. Из (1) следует $\beta(K)=\beta(i_1, i_2)+\ldots+\beta(i_p, i_1)$.

Каждой дуге (i, j) графа G поставим в соответствие число $\beta(i, j)$, которое назовем длиной дуги (i, j). Контур K будет прибыльным, если и только если длина $\beta(K)$ этого контура будет положительным числом.

Была поставлена и решена более простая задача, и придуман алгоритм определения: существует ли прибыльный контур или нет.

Для решения предложен простой полиномиальный алгоритм, в решении задачи о назначениях – простая полиномиальная задача. С целью определения контуров с положительной длиной сформулируем следующую задачу.

$$f(x) = max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta(i, j) \cdot x_{ij} \;, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq 0, \;\;\; i, j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Задача (2)-(5) – это задача о назначениях. Компоненты x_{ij}^0 оптимального углового (крайнего) вектора $x^0 = (x_{11}^0, \ldots, x_{1n}^0, \ldots, x_{n1}^0, \ldots, x_{nn}^0)$ этой задачи равны 0 или 1. Вектор x^0 определяет некоторое множество $\{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$ попарно не пересекающихся контуров в графе G [1]. Равенство $x_{ij}^0 = 1$ означает, что дуга *(i, j)* принадлежит одному из этих контуров. Любая вершина графа G принадлежит одному из этих контуров.

Для решения данной задачи доказана теорема об условиях сбалансированности и предложен метод определения прибыльных контуров (приводится формулировка теоремы).

Теорема. Пусть x^0 – оптимальный угловой вектор задачи (2)-(5), $\{\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_r\}$ – множество контуров, определяемых вектором x^0. Тогда:

1) $f(x^0) \geq 0$;

2) если $f(x^0) = 0$, то граф G сбалансирован;

3) если $f(x^0) > 0$, то хотя бы один из контуров $K_1, \ldots, K_r$ является прибыльным.

Доказательство. Вектор x^1 с компонентами $x_{ii}^1 = 1, i = 1, \ldots, n; \; x_{ij}^1 = 0, i \neq j,$ является допустимым вектором задачи (2)-(5) . Так как $\beta(i, i) = 0$, $i = 1$, …, n, то $f(x^0) = 0$. Поэтому $f(x^0) \geq 0$. Из смысла переменных x_{ij} следует

$$f(x^0) = \beta\,(K_1) + \ldots + \beta\,(K_r). \tag{6}$$

Предположим, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, r\}$ $\beta(K_i) < 0$. Пусть P – подмножество вершин, образующих контур K_i. Во множестве $\{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$ контур K_i заменим на контуры (петли) $((j, j))$, где $j \in P$. Полученному множеству контуров будет соответствовать допустимый вектор x^2 такой, что $f(x^2) > f(x^0)$. Но это противоречит тому, что x^0 – оптимальный вектор, следовательно,

$$\beta(K_i) \geq 0, \;\;\; i = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Из (6), (7) следует, что если $f(x^0) = 0$, то $\beta(K_i) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, то есть граф G сбалансирован. Если $f\,(x^0) > 0$, то из (6) следует, что существует $i \in \{1, \ldots, r\}$ такое, что $\beta(K_i) > 0$, то есть K_i – прибыльный контур. *Теорема доказана.*

В соответствии с теоремой можно определить, решая задачу о назначениях, сбалансирован граф или нет, если нет, то мы находим в результате решения задачи (2)-(5) хотя бы один прибыльный контур. Если устанавливаем, что прибыльных контуров нет, то граф сбалансирован. Если же получаем некоторые прибыльные контуры (не все), то граф несбалансирован.

Задача определения замкнутой последовательности операций, приводящих к спекулятивной прибыли, сведена к задаче о назначениях, которая является задачей полиномиальной сложности, то есть может быть решена за приемлемое время на компьютере при большом числе переменных.

В частности, на основе предложенной модели можно поставить задачу корректировки курсов валют с целью исключения возможности получения спекулятивной прибыли.

Для продолжения исследования в данной области сформулирована задача определения в орграфе с заданными весами (длинами) дуг контура с максимальным средним значением веса дуги (контура максимальной плотности).

Задача об оптимальной корректировке курсов валют.

Пусть $N = \{1,\dots, n\}$; $G = (N, E)$ – полный орграф, содержащий петли (i, i); $l(i, j)$ – вес (длина) дуги $(i, j)\in E$; K – простой контур в графе G. Обозначим: $m(K)$ – число дуг в контуре K; $l(K) = \sum_{(i,j)\in K} l(i,j)$ – вес контура K.

Определение. Плотностью простого контура K назовем число $\rho(K) = \dfrac{l(K)}{m(K)}$.

Согласно определению, плотность контура – это среднее значение весов дуг, входящих в контур. В частности, плотность контура, состоящего из одной петли, равна весу этой петли.

Поставим задачу определения простого контура максимальной плотности в графе G. Одним из приложений данной задачи является задача определения максимальной спекулятивной прибыли в среднем на одну операцию в математической модели операций купли-продажи валют [2].

Далее предлагается метод решения задачи и дается оценка вычислительной сложности, а именно: ее сложность оценивается сверху величиной $T(n)2^n$, где $T(n)$ – вычислительная сложность задачи о назначениях с n^2 переменными.

Каждой дуге $(i, j)\in E$ поставим в соответствие булеву переменную x_{ij} и рассмотрим следующую задачу булева линейного программирования.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l(i,j)x_{ij} \to max; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,n; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\dots,n; \tag{10}$$

$$x_{ii} = \alpha_i,\ i = 1, \dots, n; \tag{11}$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq n-1$.

Задача (8)-(10) – это задача о назначениях. Сложность задачи (8)-(11) при заданных α_i не превышает сложности задачи (8)-(10). Поэтому время решения всех задач (8)-(11) оценивается сверху величиной

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}T(n)=T(n)2^n, \tag{12}$$

где *T(n)* – сложность задачи о назначениях.

По смыслу переменных решение задачи (8)-(11) при фиксированном α_i взаимно однозначно определяет некоторое множество попарно непересекающихся простых контуров. При этом если $x_{ii}=1$, то в этом множестве присутствует контур, представляющий собой петлю *(i, i)*.

Теорема. Пусть K^* – контур максимальной плотности среди всех контуров, получаемых при решении всех задач (8)-(11). Тогда K^* - простой контур максимальной плотности в графе *G*.

Доказательство. Пусть *K* – любой простой контур в графе *G*, N_1 – множество вершин графа, принадлежащих контуру *K*, $N_2=N \setminus N_1$. Положим $\alpha_i=1$, если $i\in N_2$; $\alpha_i=0$, если $i\in N_1$.

При таких значениях α_i множеству контуров *K, (i, i),* $i\in N_2$ соответствует вектор *x*, удовлетворяющий условиям (9), (10), (11). Пусть $K_1,...,K_s$, *(i, i),* $i\in N_2$ – контуры, соответствующие оптимальному вектору задачи (8)-(11) при этих же значениях α_i. Так как значение целевой функции (1) равно суммарному весу контуров, определяемых допустимым вектором задачи (8)-(11), то

$$\sum_{j=1}^{s} l(K_j)\ge l(K). \tag{13}$$

Суммарное число дуг в контуре $K_1,...,K_s$ равно числу дуг в контуре *K*:

$$\sum_{j=1}^{s} m(K_j)=m(K). \tag{14}$$

Так как $\dfrac{l(K^*)}{m(K^*)}\ge\dfrac{l(K_j)}{m(K_j)}$, $j=1,...,s$, то из (13), (14) следует

$$\sum_{j=1}^{s} l(K_j)m(K_j)=l(K^*)m(K)\ge\sum_{j=1}^{s} l(K_j)m(K^*)\ge l(K)m(K^*).$$

Окончательно, $\dfrac{l(K^*)}{m(K^*)}\ge\dfrac{l(K_j)}{m(K_j)}$.

Последнее неравенство и означает, что K^* – контур максимальной плотности в графе *G*. Утверждение доказано.

Итак, для определения контура максимальной плотности достаточно решить задачи (8)-(11), число которых не превышает 2^n. При этом перед решением очередной задачи достаточно сохранять информацию о единственном контуре, который оказался наилучшим после решения предыдущих задач. Время решения оценивается сверху по формуле (12).

Математическая постановка задачи в виде задачи оптимизации.

Дадим определение сбалансированного орграфа и разработаем метод построения сбалансированного орграфа по заданному слабо связному подграфу [4]. Предложенный метод может найти применение при решении задач сбалансированности курсов валют и согласованности показателей качества управляемых систем по их относительной важности.

Определение. Полный орграф $G=(N, E)$ с длинами дуг $l(i, j)$ называется сбалансированным, если длина любого контура в орграфе равна нулю.

Утверждение 1. Полный орграф с длинами дуг $l(i, j)$ является сбалансированным, если и только если существует такой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, что $x_1 = 0$, $x_j - x_i = l(i, j)$.

Доказательство.

1. Пусть G – сбалансированный орграф. Положим $x_1 =0$, $x_j = l(j, 1)$. Тогда согласно определению $x_j - x_i = l(j, 1) - l(i, 1) = l(j, 1) + l(i, 1) = l(i, j)$.

2. Пусть $x_1 = 0$, $l(i, j) = x_j - x_i$. Тогда длина произвольного контура

$K = ((i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{m-1}, i_m), (i_m, i_1))$ равна $l(K) = l(i_1, i_2) + \ldots + l(i_m, i_1) = =(x_{i_2} - x_{i_1}) + (x_{i_3} - x_{i_2}) + \ldots + (x_{i_1} - x_{i_m}) = 0$.

Утверждение доказано.

Пусть $H=(N, F)$ – орграф с n вершинами, $h(i, j)$ – длина дуги $(i, j) \in F$. Поставим задачу построения сбалансированного орграфа $G=(N, E)$, $F \subset E$, по его подграфу H, так чтобы длины дуг в орграфе H в целом как можно меньше отличались от длин $l(i, j)$ соответствующих дуг в орграфе G. За критерий оптимальности примем минимум суммы квадратов отклонений:

$$min \sum_{(i,j)\in F} \big(l(i,j) - h(i,j)\big)^2 . \tag{15}$$

Согласно утверждению 1 задача (15) сводится к задаче минимизации функции:

$$f(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(i,j)\in F} \big(l(i,j) - h(i,j)\big)^2 , \tag{16}$$

где $x_1 = 0$ в правой части равенства (16).

Утверждение 2. Система линейных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,\ \ j = 2, \ldots, n \tag{17}$$

имеет единственное решение, которое является точкой минимума функции $f(x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство. В начале докажем, что f - строго выпуклая функция. Допустим, что для некоторых $x^1 = \left(x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$, $x^2 = \left(x_2^2, \ldots, x_n^2\right)$, $0 < \alpha < 1$ выполняется равенство

$$f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) = \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2) . \tag{18}$$

Заметим, что любая функция двух переменных в сумме (16) выпукла. Если в этой функции зафиксировать одну из переменных, то функция будет строго выпуклой по другой переменной. Поэтому из равенства (18) следует $x_i^1 = x_i^2$, $i \in J_1$, где J_1 – множество вершин в орграфе H, соединенных с вершиной 1 входящей или исходящей дугой. Поскольку в равенстве (18) переменные $x_i = \alpha x_i^1 + (1-\alpha)x_i^2 = x_i^1$, $i \in J_1$, то в сумме (16) появятся строго выпуклые функции переменных x_i, $i \in J_2$, где J_2 – множество вершин, связанных с вершинами из множества J_1 входящими или исходящими дугами. Поэтому из (18) следует $x_i^1 = x_i^2$, $i \in J_2$. Так как орграф *H* слабо связный, то в итоге получим $x^1 = x^2$. Это значит, что *f* – строго выпуклая функция.

Функция *f* ограничена снизу $(f(x) \geq 0)$ и непрерывна. Следовательно, её минимум достигается в некоторой точке $x^0 \in R^{n-1}$. Так как *f* – строго выпуклая функция, то x^0 – её единственная точка минимума [4]. Функция *f* дифференцируема во всей области определения R^{n-1}. Поэтому x^0 – стационарная точка (она является решением системы линейных уравнений (17)). Известно [4], что для выпуклой дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$\left(grad\, f(x^1),\, x^2 - x^1\right) \leq f(x^2) - f(x^1) \qquad (19)$$

при любых $x^1 \in R^{n-1}$, $x^2 \in R^{n-1}$. Если x^1 – стационарная точка $\left(grad\, f(x^1) = 0\right)$, то из (19) следует $f(x^1) \leq f(x^2)$, то есть x^1 – точка минимума. Поэтому x^0 – это единственная стационарная точка и единственное решение системы (17). Утверждение 2 доказано.

Приведем некоторые приложения.

1. Пусть *n* – число видов валют; $v(i,j)$ – курс валюты *j* по отношению к валюте *i*; $h(i,j) = \ln v(i,j)$; *H* – орграф с *n* вершинами и с длинами дуг $h(i,j)$; $w(i,j) = e^{l(i,j)}$. Числа $w(i,j)$ – это откорректированные курсы, при которых не существует циклических последовательностей купли и продажи валют, приводящих к получению спекулятивной прибыли [1], [3].

2. Пусть *n* – число показателей качества некоторой управляющей системы; $v(i,j)$ – количественная мера приоритетности показателя *j* по отношению к показателю *i*. Эти числа могут предварительно устанавливаться, к примеру, экспертным способом. Они согласованы, если $v(i,j) \cdot v(j,k) = v(i,k)$. Иначе возникает необходимость построения сбалансированного орграфа методом, изложенным в предыдущем пункте 1.

Особенностью многокомпонентных задач является то, что с помощью орграфов удается объединить в модели системы различные социальные, экономические, экологические показатели. Часть из этих показателей может иметь статистическую базу, часть - не иметь, часть может оцениваться количественно, а часть - качественно. С помощью решения многокомпонентных задач можно оценить тенденцию развития системы. При уточнении модели можно сформировать количественный прогноз изменения показателей системы, а также найти различные варианты воздействия на изучаемую систему с целью получения лучшего варианта.

В результате моделирования на основе взвешенного орграфа с временными задержками можно получить тенденцию изменения показателей во времени. Таким образом, даже такая простейшая модель позволяет прогнозировать развитие довольно сложной системы.

Список литературы

1. Курмашев И.Г. Задача о сбалансированности курсов валют // «Вестник СКУ».-1999.-№4.-Петропавловск, 1999.
2. Вьялицин А.А. О финансово-математических моделях в программах спецкурсов, на примере модели сбалансированности курсов валют / А.А.Вьялицин, И.Г.Курмашев // Сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. «Национальные системы высшего образования в условиях глобализации».- Петропавловск: СКГУ, 2001.
3. Курмашев И.Г. Об одной задаче прогнозирования спекулятивных операций на рынке СКВ // Сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. «Бизнес и образование: вектор развития».- Алматы: МАБ, 2002.
4. Курмашев И.Г. Построение сбалансированного орграфа по слабо связному подграфу / И.Г.Курмашев, А.А.Вьялицин, Н.В.Долматова // Сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. «Современные исследования в астрофизике и физико-математических науках» (18-19 нояб.).- Петропавловск: СКГУ, 2004.

Получено 18.11.08